G. CIUCU

ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI – 1965

Scanned with OKEN Scanner

MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÎNTULUI
UNIVERSITATEA BUCUREȘTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI MECANICĂ

G. CIUCU

ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI – 1963

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I

CÎMP DE PROBABILITATE

Teoria probabilității este o disciplină matematică așa cum este geometria sau mecanica. Ieșită din experiență, ca și acestea, după ce a dat conceptelor sale — toate de origine experimentală — o formă riguros matematică, ea este acum în măsură să se întoarcă la experiență pentru a cuprinde și a interpreta întinse categorii de fenomene.

Un rol central în teoria probabilităților îl joacă conceptul de *cîmp de evenimente* (§ 1) și de *variabilă aleatoare* (§ 2) definit pe el. Variabilele aleatoare ne permit ca prin intermediul unei caracteristici să conturăm evenimentele corespunzătoare, una din caracteristicile cele mai importante fiind funcția de repartiție (§ 3). În vederea *studiului comportării asimptotice sînt necesare diverse tipuri de convergență*, proprii teoriei probabilităților; ele fac obiectul paragrafului 4. Mai departe, studiul valorilor medii ale proprietăților acestora fac obiectul paragrafului 5. În sfîrșit, seriile de variabile aleatoare independente sînt considerate în paragraful 6.

§ 1. Cîmp de evenimente

1. Cîmpuri, probabilități

Cîmpurile de evenimente pe care le vom examina vor fi formate cu părțile unei mulțimi Ω, presupusă dinainte dată. Probabilizarea cîmpurilor de evenimente este acea dată de A. N. Kolmogorov și care a devenit clasică.

Cîmp complet aditiv. Să presupunem dată mulțimea Ω, familia K de părți se numește cîmp complet aditiv dacă sînt verificate axiomele

A_1: oricare ar fi $X \in K$, $\mathbf{C}X \in K$.

A_2: $\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \in K$, dacă $X_\alpha \in K$ pentru orice $\alpha \in I$, unde I este o familie de indici cel mult numărabilă.

Prin urmare, cîmpurile de probabilitate complete sînt caracterizate prin faptul că o dată cu o mulțime din cîmp conține și complimentara ei,

precum și de faptul că reuniunile cel mult numărabile de mulțimi din cîmp sînt încă mulțimi ale cîmpului.

Observații: 1. Dacă K este un cîmp complet aditiv atunci $\Omega \in K$; deoarece din axioma A_1, mulțimile X și $\mathbf{C}X$ aparțin la K, iar din A_2, mulțimea $X \cup \mathbf{C}X \in K$.

2. Mulțimea vidă, Φ aparține la K, deoarece dacă $\Omega \in K$, atunci după A_1 și $\mathbf{C}\Omega = \Phi$ aparține la K.

3. Dacă $X \in K$ și $Y \in K$, atunci din relațiile

$$X - Y = X \cap \mathbf{C}Y = \mathbf{C}(\mathbf{C}X \cup Y)$$

rezultă că mulțimea $X - Y \in K$.

4. Dacă X_α, $\alpha \in I$ este o familie cel mult numărabilă de mulțimi din K, atunci din relația

$$\bigcap_{\alpha \in I} X_\alpha = \mathbf{C}\left(\bigcup_{\alpha \in I} \mathbf{C}X_\alpha\right)$$

rezultă că

$$\bigcap_{\alpha \in I} X_\alpha \in K.$$

5. Dacă X_n, $n = 1, 2, \ldots$ este un șir de mulțimi din K, atunci mulțimile

$$\lim_n \sup X_n \quad \text{și} \quad \lim_n \inf X_n$$

aparțin lui K, deoarece

$$\lim_n \sup X_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} X_k \quad \text{și} \quad \lim_n \inf X_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} X_k.$$

Pentru șirurile convergente de mulțimi din K, mulțimile limită aparțin de asemenea lui K.

Dacă axioma A_2 se enunță numai pentru familii finite de indici, atunci cîmpul se numește cîmp finit sau aditiv. Adesea cîmpurile aditive se numesc algebre de părți sau triburi, iar cîmpurile complet aditive se numesc σ — algebre sau algebre complete sau triburi boreliene.

Definiția probabilității. În axiomatizarea lui A. N. Kolmogorov, probabilitatea este privită ca funcție de mulțime definită pe un cîmp complet aditiv cu valori numerice, mai precis este privită ca o măsură totală pe K.

Vom presupune date mulțimea Ω și cîmpul complet aditiv K. Elementele din $\mathfrak{P}(\Omega)$ le vom numi evenimente.

Definiție. Funcția de mulțime P, definită pe K cu valori reale, se numește probabilitate, dacă

P_1 oricare ar fi $X \in K$, $P(X) \geqq O$,

P_2 oricare ar fi familia de indici cel mult numărabilă I, relațiile: $X_\alpha \in K$, pentru orice $\alpha \in I$, $X_\alpha \cap X_\beta = \Phi$, $\alpha \in I$, $\beta \in I$, $\alpha \neq \beta$, implică

$$P\left(\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha\right) = \sum_{\alpha \in I} P(X_\alpha),$$

P_3. $P(\Omega) = 1$.

Tripletul (Ω, K, P) se numește cîmp de probabilitate complet aditiv; în acest cîmp evenimentele Ω și Φ se numesc, respectiv, evenimentul sigur și evenimentul imposibil. Din relația

$$\Omega = \Omega \cup \Phi$$

și din axioma P_2, rezultă că

$$1 = 1 + P(\Phi),$$

deci $P(\Phi) = 0$, adică evenimentul imposibil are probabilitatea zero.

Observația 1. Dacă $X \in K$, atunci din relația

$$\Omega = X \cup \mathbf{C}X$$

și din axiomele P_2 și P_3, rezultă

$$P(\mathbf{C}X) = 1 - P(X).$$

Observația 2. Dacă $X \in K$, $Y \in K$, și $X \subseteq Y$, atunci din relația

$$Y = X \cup (Y - X)$$

și din axioma P_2 rezultă

$$P(Y - X) = P(Y) - P(X)$$

și din axioma P_1

$$P(X) \leqslant P(Y).$$

De aici se vede că probabilitatea este funcție crescătoare față de relația de incluziune. În general, în teoria probabilităților relația „$X \subseteq Y$" se citește: „realizarea evenimentului X implică realizarea evenimentului Y".

Propoziție. Dacă A și B sînt două evenimente din K, atunci

(a) $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

(b) $$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B),$$

(c) $$P(A \circ B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

Demonstrație. a) Se vede imediat că

(*) $$A \cup B = A \cup (\mathbf{C}A \cap B)$$

și, de asemenea, că

(**) $$(A \cap B) \cup (\mathbf{C}A \cap B) = B; \quad (A \cap B) \cap (\mathbf{C}A \cap B) = \Phi.$$

Din (*) rezultă că

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\mathbf{C}A \cap B). \tag{1}$$

Din (**) obținem că

$$P(A \cap B) + P(\mathbf{C}A \cap B) = P(B),$$

de unde

$$P(\mathbf{C}A \cap B) = P(B) - P(A \cap B).$$

Înlocuind pe $P(\mathbf{C}A \cap B)$ în egalitatea (1) rezultă relația (a). Se observă că $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

b) Avem $(B \cap \mathbf{C}A) \cup (A \cap B) = (B - A) \cup (B \cap A) = B$

și

$$(B - A) \cap (A \cap B) = \Phi.$$

Rezultă atunci că

$$P(B - A) = P(B) - P(B \cap A).$$

c) Știm că $A \circ B = (A - B) \cup (B - A)$, adică $A \circ B$ este diferența simetrică a mulțimilor A și B.

Cum $(A - B) \cap (B - A) = \Phi$, rezultă

$$P(A \circ B) = P(A - B) + P(B - A).$$

Din proprietatea (b) avem

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B),$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B).$$

Adunînd cele două egalități de mai sus obținem

$$P(A \circ B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

Teoremă. *Fie* $(A_n)_{n \in N} \subset K$ *și* $A_{n+1} \subseteq A_n$. *Dacă* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \Phi$, *atunci*

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0.$$

Demonstrație. Să observăm că pentru șirul de mulțimi $(A_n)_n$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{C}A_n = \Omega.$$

Întrucît relațiile $A_{n+1} \subseteq A_n$ implică relațiile $\mathbf{C}A_n \subseteq \mathbf{C}A_{n+1}$, putem scrie:

$$\Omega = \mathbf{C}A_1 \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbf{C}A_{n+1} - \mathbf{C}A_n) \right),$$

unde mulțimile din paranteză sînt disjuncte două cîte două. Din axiomele P_2 și P_3 rezultă

$$1 = P(\Omega) = P(\mathbf{C}A_1) + \sum_{n=1}^{\infty} P(\mathbf{C}A_{n+1} - \mathbf{C}A_n).$$

Din condițiile teoremei rezultă că

$$P(\mathbf{C}A_{n+1} - \mathbf{C}A_n) = P(\mathbf{C}A_{n+1}) - P(\mathbf{C}A_n)$$

Atunci

$$1 = P(\mathbf{C}A_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \{P(\mathbf{C}A_{n+1}) - P(\mathbf{C}A_n)\},$$

de unde rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} P(\mathbf{C}A_n) = 1$$

și cum $P(A_n) + P(\mathbf{C}A_n) = 1$, obținem

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0.$$

Teoremă. *Fie* $(A_n)_{n\in N} \subset K$ *și* $A_n \subseteq A_{n+1}$, *atunci*

$$P\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Demonstrație. Șirul $(A_n)_n$ fiind ascendent, atunci mulțimea $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in N} A_n = B$ aparține la K. Șirul $(B - A_n)_n$ este șir descendent, pentru care avem relațiile

$$\lim_{n\to\infty} (B - A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (B - A_n) = \Phi,$$

după rezultatele din teorema precedentă:

$$\lim_{n\to\infty} P(B - A_n) = 0.$$

Cum $A_n \subseteq B$, atunci $P(B - A_n) = P(B) - P(A_n)$ și deci

$$P(B) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Cele două teoreme au fost date de Kolmogorov și caracterizează funcțiile de mulțime complet aditive cu valori pozitive.

Inegalitatea lui Boole. Fie A_i *o familie numărabilă de evenimente din* K. *Atunci*

$$P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \geqslant 1 - \sum_{i\in I} P(\mathbf{C}A_i).$$

Demonstrație. Știm că

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \mathbf{C}\left(\bigcup_{i\in I} \mathbf{C}A_i\right),$$

de unde

$$P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = P\left(\mathbf{C}\left(\bigcup_{i\in I} \mathbf{C}A_i\right)\right).$$

Cum însă

$$P(\mathbf{C}A) = 1 - P(A),$$

rezultă că

$$P(\bigcap_{i\in I} A_i) = 1 - P(\bigcup_{i\in I} A_i).$$

Însă

$$P(\bigcup_{i\in I} \mathbf{C}A_i) \leqslant \sum_{i\in I} P(\mathbf{C}A_i)$$

și deci

$$P(\bigcap_{i\in I} A_i) \geqq 1 - \sum_{i\in I} P(\mathbf{C}A_i).$$

Definiția clasică a probabilităților. Să considerăm familia de mulțimi disjuncte

$$(E_1, E_2, \ldots, E_n)$$

există cel mai mic corp borelian care să conțină mulțimile familiei. Să notăm acest corp cu Ω; față de relația „$\subseteq$“ corpul Ω are pe Φ ca cel mai mic element și pe $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$ ca cel mai mare element.

Să considerăm funcția de mulțime P definită astfel

$$P(E_1) = P(E_2) = \ldots = P(E_n) = \frac{1}{n}.$$

Funcția P se poate prelungi la Ω într-o probabilitate pe Ω. Probabilitatea obținută vom nota-o tot prin P. Pentru evenimentul

$$A = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_m$$

valoarea probabilității P este

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Ca exemplu să considerăm un zar omogen și să notăm cu

$$E_1, E_2, \ldots, E_5, E_6$$

evenimentul care reprezintă fețele zarului. Dacă punem

$$P(E_i) = \frac{1}{6} \qquad i = 1, 2, \ldots, 6$$

atunci probabilitatea evenimentului

$$A = E_2 \cup E_4 \cup E_6$$

este egală cu

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Probabilități geometrice. Să notăm cu $\mathfrak{B}$ un corp borelian de părți măsurabile Lebesgue al dreptei R, astfel ca elementul maxim E din $\mathfrak{B}$ să

fie de măsură finită. Notăm cu P măsura indusă, pe $\mathfrak{B}$, de către măsura Lebesgue: pentru $X \in \mathfrak{B}$, vom pune

$$P(X) = \frac{\mu(X)}{\mu(E)}.$$

Funcția de mulțime P este o probabilitate pe $\mathfrak{B}$ și raportul $\frac{\mu(X)}{\mu(E)}$ se interpretează ca probabilitatea ca un punct al mulțimii E să aparțină mulțimii X.

2. Probabilitate condiționată

Fie $\{\Omega, K, P\}$ un cîmp de probabilitate complet aditiv și A și $B \in K$. Vom numi probabilitatea evenimentului A condiționată de evenimentul B, și o vom nota prin $P_B(A)$ sau $P(A|B)$, raportul

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A)$$

dacă $P(B) \neq 0$.

Propoziție. *Cîmpul* $\{\Omega, K, P_B\}$ *este un cîmp de probabilitate complet aditiv, dacă* $P(B) \neq 0$.

Demonstrație. Este suficient să arătăm că P_B este o probabilitate pe K, cu alte cuvinte că

1) $P_B(\Omega) = 1$;

2) $P_B(\bigcup_{\alpha \in I} A) = \sum_{\alpha \in I} P_B(A_\alpha)$ dacă evenimentele $(B \cap A_\alpha)_{\alpha \in I}$ sînt incompatibile două cîte două.

Avem:

$$P_B(\Omega) = \frac{P(B \cap \Omega)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

Dacă $(A_\alpha)_{\alpha \in I} \subset K$ este o familie cel mult numerabilă de evenimente incompatibile două cîte două, atunci și evenimentele $(B \cap A_\alpha)_{\alpha \in I}$ sînt incompatibile două cîte două și

$$P_B(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \frac{P(B \cap \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)}{P(B)} = \frac{P(\bigcup_{\alpha \in I}(B \cap A_\alpha))}{P(B)} = \frac{\sum_{\alpha \in I} P(B \cap A_\alpha)}{P(B)} = \sum_{\alpha \in I} P_B(A_\alpha),$$

ceea ce demonstrează că sistemul $\{\Omega, K, P_B\}$ constituie un cîmp de probabilitate complet aditiv. Să stabilim acum cîteva relații importante.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n evenimente și să presupunem că

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0.$$

Atunci

$$(*) \quad P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots \ldots P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Într-adevăr, din definiția probabilității condiționate avem

$$P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n) =$$

$$= P(A_1) \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \ldots \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})}.$$

Făcînd simplificările se obține egalitatea (*).

Formula lui Bayes. Să considerăm n evenimente incompatibile $A_1, A_2, \ldots, A_n$ care realizează o desfacere a evenimentului total, cu alte cuvinte

$$A_i \cap A_j = \Phi; \quad i \neq j; \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Dacă X este un eveniment oarecare din cîmpul de evenimente considerat, atunci există o desfacere corespunzătoare în evenimente incompatibile

$$X = (A_1 \cap X) \cup (A_2 \cap X) \cup \ldots \cup (A_n \cap X)$$

sau

$$P(X) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j \cap X).$$

Din definiția probabilității condiționate, avem

$$P(X) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)\, P_{A_j}(X).$$

Am văzut însă că

$$P(A_i \cap X) = P_X(A_i)\, P(X) = P(A_i)\, P_{A_i}(X),$$

de unde rezultă

$$P_X(A_i) = \frac{P(A_i)\, P_{A_i}(X)}{P(X)}$$

sau

$$P_X(A_i) = \frac{P(A_i)\, P_{A_i}(X)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\, P_{A_j}(X)}.$$

Această ultimă egalitate se numește formula lui Bayes.

Scanned with OKEN Scanner

3. Evenimente independente

Fiind dat cîmpul de probabilităţi $\{\Omega, K, P\}$, vom spune că evenimentele A şi B din K sînt independente dacă avem:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B), \\ P(\mathbf{C}A \cap B) &= P(\mathbf{C}A) \cdot P(B), \\ P(A \cap \mathbf{C}B) &= P(A) \cdot P(\mathbf{C}B), \\ P(\mathbf{C}A \cap \mathbf{C}B) &= P(\mathbf{C}A) \cdot P(\mathbf{C}B). \end{aligned} \tag{1}$$

Relaţiile de mai sus implică

$$\begin{aligned} P_A(B) &= P_{\mathbf{C}A}(B) = P(B), \\ P_B(A) &= P_{\mathbf{C}B}(A) = P(A). \end{aligned} \tag{2}$$

La prima vedere pare că relaţiile (2) implică relaţiile (1). Aceasta este adevărat însă numai dacă $P(A)$ şi $P(B)$ nu sînt nule sau egale cu unu. În cazurile în care probabilităţile $P(A)$ şi $P(B)$ sînt nule sau egale cu unu, condiţiile (2) îşi pierd semnificaţia.

Condiţia esenţială a independenţei evenimentelor A şi B este, dacă ţinem seama de (2) şi de faptul că

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

dată de

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Se observă imediat că dacă evenimentele A şi B sînt independente, atunci şi evenimentele A, $\mathbf{C}B$; $\mathbf{C}A$, B; $\mathbf{C}A$, $\mathbf{C}B$ sînt independente (două cîte două).

Într-adevăr, avem

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \mathbf{C}B).$$

Cum însă am presupus că evenimentele A şi B sînt independente

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

rezultă că

$$P(A \cap \mathbf{C}B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)\,[1 - P(B)] = P(A) \cdot P(\mathbf{C}B).$$

Analog se poate arăta că evenimentele $\mathbf{C}A$ şi B sînt independente o dată cu A şi B, sau

$$P(\mathbf{C}A \cap B) = P(\mathbf{C}A) \cdot P(B).$$

De aici rezultă că şi

$$P(\mathbf{C}A \cap \mathbf{C}B) = P(\mathbf{C}A) \cdot P(\mathbf{C}B).$$

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog se definește și independența evenimentelor $A_1, A_2, \ldots, A_n$, și anume: evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt independente dacă

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_r}),$$

pentru orice șir

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r < n.$$

Să observăm că definiția independenței evenimentelor $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se referă la totalitatea evenimentelor. Cu alte cuvinte, pentru ca evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ să fie independente nu este suficient ca ele să fie, de exemplu, independente două cîte două

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \qquad (i \neq j).$$

Acest fapt rezultă din următorul exemplu dat de S. N. Bernstein. Fie

$$E = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \quad \text{și} \quad P(\{a_i\}) = \frac{1}{4} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Să considerăm acum evenimentele

$$A = \{a_1, a_2\}, \quad B = \{a_1, a_3\}, \quad C = \{a_2, a_3\}.$$

Probabilitățile corespunzătoare acestor evenimente sînt

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}.$$

Avem

$$P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(C \cap A) = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

ceea ce arată independența evenimentelor A, B și C luate două cîte două.

Cu toate acestea, evenimentele A, B și C nu sînt independente în totalitatea lor, deoarece

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4},$$

iar

$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{8}.$$

4. Entropia unui cîmp de evenimente

Fie A un cîmp finit de evenimente cu desfacerea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ și probabilitățile corespunzătoare $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_n)$,

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

În teoria informației se pune problema gradului de nedeterminare a desfacerii considerate. Pentru aceasta se introduce o mărime $H(A)$ numită entropia cîmpului A și care constituie o măsură a nedeterminării sau o cantitate de informație conținută în cîmpul A și care se definește prin egalitatea

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \log P(A_i),$$

unde logaritmii se iau în baza 2.

Să stabilim cîteva proprietăți simple ale entropiei.

a) Entropia este egală cu zero, atunci și numai atunci cînd printre numerele $P(A_1)$, $P(A_2)$, ..., $P(A_n)$ unul singur este egal cu unitatea, iar celelalte sînt nule.

b) Cea mai mare nedeterminare o are schema în care toate rezultatele sînt echiprobabile. În acest caz

$$P(A_k) = \frac{1}{n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Aceasta rezultă dacă ținem seama de o proprietate a funcțiilor continue și convexe

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(a_k),$$

unde $a_i (i = 1, \ldots, n)$ sînt numere pozitive oarecare. Dacă punem

$$a_k = P(A_k)$$

și

$$\varphi(x) = x \ln x,$$

avem

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \log P(A_k) = \frac{1}{n} H(A),$$

deci

$$H(A) \leqslant \log n = H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right).$$

Să considerăm o dată cu cîmpul A și cîmpul finit B, cu desfacerea $B_1, B_2, \ldots, B_m$, cu probabilitățile corespunzătoare $P(B_1), P(B_2), \ldots, P(B_m)$. Evident că entropia acestui cîmp este egală cu

$$H(B) = -\sum_{k=1}^{m} P(B_k) \log P(B_k)$$

și cîmpul finit de evenimente AB, pe care să-l numim reuniunea cîmpurilor A și B, format din evenimentele $A_i A_k$ cu probabilitățile $P(A_i B_k)$. Entropia cîmpului AB este dată de:

$$H(AB) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(A_i B_j) \log P(A_i B_j).$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom defini acum entropia condiționată a cîmpului B, în ipoteza că în cîmpul A a avut loc evenimentul A_i, prin egalitatea

$$H_{A_i}(B) = -\sum_{k=1}^{m} P_{A_i}(B_k) \log P_{A_i}(B_k),$$

unde

$$P_{A_i}(B_k) = \frac{P(A_i \cap B_k)}{P(A_i)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Să observăm că pentru orice eveniment A_i al cîmpului A avem o valoare determinată pentru $H_{A_i}(B)$, pe care o putem considera ca o variabilă aleatoare. Valoarea medie a acestei variabile definită prin

$$H_A(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) H_{A_i}(B)$$

o vom numi entropia cîmpului B condiționată de cîmpul A.

Să stabilim cîteva inegalități mai importante.

Propoziție. *Pentru orice cîmpuri de evenimente finite A, B și C*

$$H(AB) = H(A) + H_A(B), \tag{1}$$

$$H_A(B) \leqslant H(B), \tag{2}$$

$$H_{AB}(C) \leqslant H_B(C). \tag{3}$$

Demonstrație. a) Să presupunem mai întîi că cele două cîmpuri A și B sînt independente. Atunci

$$-H(AB) = \sum_{i,k} P(A_iB_k) \log P(A_iB_k).$$

Însă

$$P(A_iB_k) = P(A_i)\, P(B_k)$$

și deci

$$-H(AB) = \sum_{i,k} P(A_i)\, P(B_k)\, (\log P(A_i) + \log P(B_k)) =$$

$$= \sum_k P(B_k) \sum_i P(A_i) \log P(A_i) + \sum_i P(A_i) \sum_k P(B_k) \log P(B_k) =$$

$$= -H(A) - H(B).$$

b) Dacă cele două cîmpuri sînt dependente, atunci știm că

$$P(A_iB_k) = P(A_i)\, P_{A_i}(B_k)$$

și deci

$$-H(AB) = \sum_{i,k} P(A_i)\, P_{A_i}(B_k) \log [P(A_i)\, P_{A_i}(B_k)] =$$

$$= \sum_{i,k} P(A_i)\, P_{A_i}(B_k)\, (\log P(A_i) + \log P_{A_i}(B_k)) =$$

$$= \sum_k P_{A_i}(B_k) \sum_i P(A_i) \log P(A_i) +$$

$$+ \sum_i P(A_i) \sum_k P_{A_i}(B_k) \log P_{A_i}(B_k).$$

De unde rezultă că

$$H(AB) = H(A) + H_A(B).$$

2) Să considerăm funcţia

$$f(x) = x \log x$$

care este o funcţie convexă pentru $x > 0$. Atunci pentru orice $x_i > 0$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\Sigma\lambda_i = 1$ avem

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \geqslant f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right).$$

Să observăm că inegalitatea pe care vrem s-o stabilim se scrie sub forma

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \sum_{k=1}^{n} P_{A_i}(B_k) \log P_{A_i}(B_k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \log P(B_k).$$

În inegalitatea (*) să punem

$$\lambda_i = P(A_i) \text{ şi } x_i = P_{A_i}(B_k).$$

Atunci

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \sum_{k=1}^{m} P_{A_i}(B_k) \log P_{A_i}(B_k) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1} P(A_i)\ (f(P_{A_i}(B_k))\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{m} f\left(\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\ P_{A_i}(B_k)\right) = \sum_{k=1}^{m} f(P(B_k)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} P(B_k) \log P(B_k),$$

deoarece

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1, \text{ iar } \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B_k) = P(B_k).$$

Am arătat deci că

$$H_A(B) \leqslant H(B).$$

3) Să presupunem că în cîmpul B s-a realizat evenimentul B_k. Atunci cîmpul AC are pentru evenimentele A_iC_j probabilităţi determinate

$$P_{B_k}(A_iC_j) = q(A_iC_j).$$

Analog, cîmpul A devine cîmpul A' cu probabilităţile

$$P_{B_k}(A_i) = q(A_i)$$

şi cîmpul C devine C' cu probabilităţile

$$P_{B_k}(C_j) = q(C_j).$$

După inegalitatea (2) avem

$$(\alpha) \quad H_{A'}(C') \leqslant H(C')$$

dacă

$$(\beta) \quad H(C') = -\sum_j q(C_j) \log q(C_j) = -\sum_j P_{B_k}(C_j) \log P_{B_k}(C_j) = H_{B_k}(C).$$

Însă

$$H_{A'}(C') = -\sum_i q(A_i) \sum_j q_{A_i}(C_j) \log q_{A_i}(C_j),$$

unde

$$q_{A_i}(C_j) = \frac{q(A_i \cap C_j)}{q(A_i)} = \frac{P_{B_k}(A_i \cap C_j)}{P_{B_k}(A_i)} = P_{B_k A_i}(C_j),$$

cu alte cuvinte

$$(\gamma) \quad H_{A'}(C') = -\sum_i P_{B_k}(A_i) \sum_j P_{B_k A_i}(C_j) \log P_{B_k A_i}(C_j) =$$

$$= \sum_i P_{B_k}(A_i) H_{B_k A_i}(C).$$

Înlocuind β și γ în α obținem

$$\sum_i P_{B_k}(A_i) H_{B_k A_i}(C) < H_{B_k}(C).$$

Înmulțind acum inegalitatea de mai sus cu $P(B_k)$ și sumînd apoi după k, obținem

$$\sum_{i,k} P(B_k) P_{B_k}(A_i) H_{B_k A_i}(C) \leqslant \sum_k P(B_k) H_{B_k}(C).$$

Cum însă

$$P(B_k) P_{B_k}(A_i) = P(B_k) \cdot \frac{P(A_i B_k)}{P(B_k)} = P(A_i B_k)$$

iar

$$\sum_k P(B_k) H_{B_k}(C) = H_B(C),$$

rezultă că

$$\sum_{i,k} P(A_i B_k) H_{A_i B_k}(C) \leqslant H_B(C),$$

care se mai poate scrie

$$H_{AB}(C) \leqslant H_B(C).$$

Observație. Din inegalitățile (1) și (2) rezultă că

$$H(AB) \leqslant H(A) + H(B).$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. Variabile aleatoare

1. Definiții, proprietăți

Vom presupune dat cîmpul de probabilități $\{\Omega, K, P\}$ și funcțiile f definite pe Ω cu valori reale. Pe dreapta reală R vom nota cu $\mathfrak{B}$, tribul mulțimilor boreliene, formînd astfel cîmpul complet aditiv $(R, \mathfrak{B})$. Deoarece toate funcțiile f sînt definite pe Ω, în cele ce urmează nu vom mai specifica aceasta.

Definiție. O aplicație f este o variabilă aleatoare dacă

$$\{\omega;\ \omega\in\Omega,\ f(\omega) > c\} \in K,$$

pentru orice număr real c.

Adesea mulțimea

$$\{\omega;\ \omega\in\Omega,\ f(\omega) > c\}$$

se notează

$$\{f > c\}$$

și reprezintă imaginea inversă a semidreptei deschise

$$(c, +\infty).$$

Prin urmare,

$$(f > c) = f^{-1}((c, +\infty)) = \{\omega;\ f(\omega) > c\}.$$

Dacă considerăm semidreptele $[c, +\infty)$ sau $(-\infty, c)$, $(-\infty, c]$, preimaginile lor, respectiv

$$f^{-1}([c, +\infty)),\quad f^{-1}((-\infty, c)),\quad f^{-1}((-\infty, c]),$$

le vom nota

$$\{f \geqslant c\},\quad \{f < c\},\quad \{f \leqslant c\}.$$

Dacă $B\in\mathfrak{B}$, atunci preimaginea mulțimii boreliene prin f este

$$f^{-1}(B) = \{\omega,\ f(\omega) \in B\}.$$

Propoziție. *O aplicație f este o variabilă aleatoare dacă și numai dacă* $\{\omega;\ f(\omega) \geqslant c\} \in K$ *sau* $\{\omega;\ f(\omega) < c\} \in K$ *sau* $\{\omega;\ f(\omega) \leqslant c\} \in K$ *pentru orice c real.*

Propoziția rezultă imediat din egalitățile de mai jos

$$\{f \geqslant c\} = \{\omega;\ f(\omega) \geqslant c\} = \bigcap_{n=s}^{\infty} \left\{\omega:\ f(\omega) > c - \frac{1}{n}\right\}$$

și

$$\{f \leqslant c\} = \{\omega;\ f(\omega) \leqslant c\} = \Omega - \{\omega:\ f(\omega) > c\},$$
$$\{f < c\} = \{\omega:\ f(\omega) < c\} = \Omega - \{\omega;\ f(\omega) \geqslant c\}.$$

O b s e r v a ț i e. Dacă f este variabilă aleatoare, atunci pentru orice $a < b$ numere reale

$$f^{-1}(\{a\}) \in K,\quad f^{-1}([a, b)) \in K,\quad f^{-1}([a, b]) \in K,\quad f^{-1}((a, b)) \in K$$

și pentru orice mulțime boreliană $B \in \mathfrak{B}$,

$$f^{-1}(B) \in K.$$

Să stabilim acum cîteva teoreme privind variabilele aleatoare, pe care le vom utiliza în mod special.

Teoremă. *Fie f o variabilă aleatoare și k un număr finit. Atunci*

a) $f + k$

b) kf

c) $|f|$

d) f^2

e) $\frac{1}{f}$ *dacă* $f \neq 0$

sînt de asemenea variabile aleatoare.

Demonstrație. Este suficient să observăm că

a) $\{\omega:\ f + k > a\} = \{\omega:\ f > a - k\} \in K,$

b) $$\{\omega:\ kf > a\} = \begin{cases} \left\{\omega;\ f > \frac{a}{k}\right\} \in K \text{ dacă } k > 0; \\ \left\{\omega;\ f < \frac{a}{k}\right\} \in K \text{ dacă } k < 0, \end{cases}$$

ca să deducem că funcțiile $f + k$ și kf sînt de asemenea variabile aleatoare.

c) Funcția $|f|$ este o variabilă aleatoare, deoarece

$$\{\omega:\ |f| > a\} = \{\omega;\ f > a\} \cup \{\omega;\ f < -a\} \in K.$$

d) Întrucît

$$\{\omega:\ f^2 > a\} = \{\omega:\ |f| > \sqrt{a}\},$$

rezultă că f^2 este o variabilă aleatoare.

e) Avem, dacă $f \neq 0$,

$$\left\{\omega;\ \frac{1}{f} > a\right\} = \begin{cases} \{\omega:\ f > 0\} & \text{dacă } a = 0 \\ \{\omega:\ f > 0\} \cap \left\{\omega;\ f < \frac{1}{a}\right\} & \text{dacă } a > 0 \\ \{\omega:\ f > 0\} \cup \{\omega;\ f < 0\} \cap \left\{\omega;\ f < \frac{1}{a}\right\} & \text{dacă } a < 0, \end{cases}$$

de unde rezultă că $\frac{1}{f}$ este de asemenea o variabilă aleatoare.

Teoremă. *Fie* $\{f_j\}_{0\leqslant j<\infty}$ *un şir de variabile aleatoare. Să punem:*

$$h(\omega) = \sup\{f_j(\omega);\ j = 0,1,\ldots\},$$
$$g(\omega) = \inf\{f_j(\omega);\ j = 0,1,\ldots\},$$
$$f^*(\omega) = \limsup_{n\to\infty} f_j(\omega),$$
$$f_*(\omega) = \liminf_{n\to\infty} f_j(\omega).$$

Atunci şi h, g, f^* şi f_* *sînt variabile aleatoare.*

Demonstraţie. Pentru orice $n\in N$ avem

$$\{\omega:\ f_n(\omega) < c\} \in K.$$

Să observăm că

$$\{\omega:\ g(\omega) < c\} = \bigcup_{n\in N}\{\omega:\ f_n(\omega) < c\}$$

şi deci $g(\omega)$ este o variabilă aleatoare.

Din următoarea egalitate evidentă

$$\{\omega:\ h(\omega) > c\} = \bigcup_{n\in N}\{\omega:\ f_n(\omega) > c\} = \mathbf{C}\bigcap_{n\in N}\{\omega:\ f_n(\omega) \leqslant c\}$$

rezultă că $h(\omega)$ este o variabilă aleatoare.

Din faptul că

$$f^*(\omega) = \inf_{\substack{n\geqslant 0\\ m\geqslant n}}(\sup f_m(\omega))$$
$$f_*(\omega) = \sup_{\substack{n\geqslant 1\\ m\geqslant n}}(\inf f_m(\omega))$$

rezultă de asemenea că f^* şi f_* sînt variabile aleatoare.

Corolar. Dacă $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ şi dacă f este finită, atunci f este o variabilă aleatoare.

Teoremă. *Fie* f *şi* g *două variabile aleatoare. Atunci*

$$\{\omega;\ f(\omega) > g(\omega)\} \in K,$$
$$\{\omega;\ f(\omega) \geqslant g(\omega)\} \in K,$$
$$\{\omega;\ f(\omega) = g(\omega)\} \in K.$$

Demonstraţie. Să observăm că

$$\{\omega:\ f(\omega) > g(\omega)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\{\omega:\ f(\omega) > r_k\}\cap\{\omega:\ g(\omega) < r_k\},$$

unde cu $r_1, r_2, \ldots$ am numerotat numerele raţionale. Rezultă că

$$\{\omega:\ f(\omega) > g(\omega)\} \in K.$$

Ţinînd seama că

$$\{\omega: f(\omega) \geqslant g(\omega)\} = \mathbf{C}\{\omega: g(\omega) > f(\omega)\}$$
$$\{\omega: f(\omega) = g(\omega)\} = \{\omega: f(\omega) \geqslant g(\omega)\} \cap \{\omega: f(\omega) \leqslant g(\omega)\},$$

rezultă şi celelalte două proprietăţi.

Teoremă. *Dacă f şi g sînt două variabile aleatoare, atunci şi*

a) $f - g$
b) $f + g$
c) fg
d) $\frac{f}{g}$

sînt de asemenea variabile aleatoare.

Demonstraţie. a) Ţinînd seama de teorema precedentă rezultă că

$$\{f - g > c\} = \{f > g + c\}$$

şi deci $f - g$ este o variabilă aleatoare.

b) Faptul că $f + g$ este o variabilă aleatoare rezultă din egalitatea

$$f + g = f - [-g].$$

c) Putem scrie că

$$fg = \frac{1}{4}[(f + g)^2 - (f - g)^2];$$

cum $f + g$, $f - g$ şi f^2 sînt variabile aleatoare rezultă că şi $f \cdot g$ este de asemenea o variabilă aleatoare.

d) Din egalitatea

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g},$$

rezultă că f/g este variabilă aleatoare. Din cele trei teoreme se vede că mulţimea variabilelor aleatoare este spaţiu vectorial real.

2. Variabile aleatoare simple

Vom spune că variabila aleatoare f este simplă dacă ia numai un număr finit de valori.

Fie $v_1, v_2, \ldots, v_n$ valorile luate de f respectiv pe mulţimile $E_1, E_2, \ldots, E_n$ cu proprietăţile $E_i \cap E_j = \Phi$, pentru $i \neq j$ şi $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$. Atunci variabila aleatoare simplă f poate fi scrisă sub forma

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^{n} v_k C_{E_k}(\omega),$$

unde

$$C_{E_k}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \omega \notin E_k \\ 1 & \text{dacă } \omega \in E_k \end{cases}.$$

Se vede că pentru ca f să fie o variabilă aleatoare simplă este necesar și suficient ca mulțimile E_k să aparțină corpului K.

Uneori vom mai nota o variabilă aleatoare singulară prin

$$\{v_1, E_1; v_2, E_2; \ldots; v_n, E_n\}.$$

Dacă f și g sînt două variabile aleatoare iar α un număr real oarecare, atunci și $f+g$, fg, f^α, αf și $|f|$ sînt de asemenea variabile aleatoare simple.

Vom demonstra o teoremă importantă.

Teoremă. *Dacă f este o variabilă aleatoare pozitivă, atunci există un șir crescător $(f_j)_{0 \leqslant j < \infty}$ de variabile aleatoare simple pozitive convergent către f.*

Demonstrație. Fie

$$f_n(\omega) = \begin{cases} \dfrac{i-1}{2^n} & \text{dacă } \dfrac{i-1}{2^n} < f(\omega) < \dfrac{i}{2^n} \ (i = 1, \ldots, 2^n \cdot n) \\ n & \text{dacă } f(\omega) \geqslant n \end{cases}$$

pentru orice $n = 1,2, \ldots$ Funcțiile $f_n(\omega)$ astfel definite sînt variabile aleatoare simple și de asemenea șirul f_n este nedescrescător.

Se vede imediat că

$$\lim_{n \to \infty} f_n(\omega) = f(\omega),$$

deoarece dacă $f(\omega) < n$, atunci

$$|f(\omega) - f_n(\omega)| < \frac{1}{2^n},$$

ceea ce demonstrează teorema.

§ 3. Funcția de repartiție

1. Definiții, proprietăți

Fie x un număr real oarecare și $f(\omega)$ o variabilă aleatoare. Să punem

$$F(x) = P(f(\omega) < x).$$

Funcția $F(x)$ se numește funcția de repartiție a variabilei aleatoare f.

Dacă $f(\omega)$ este o variabilă aleatoare discretă sau discontinuă, cu alte cuvinte dacă poate lua numai un număr finit sau o infinitate numărabilă de valori, atunci funcția de repartiție este suma probabilităților valorilor lui $f(\omega)$ situate la stînga lui x.

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem că valorile pe care le ia variabila aleatoare $f(\omega)$ și probabilitățile respective sînt date în tabela de mai jos (care se mai numește și tabelă de repartiție)

x_i	0	1	2	3	4
P_i	0,2	0,3	0,1	0,3	0,1

Atunci avem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ 0{,}2 & \text{dacă } 0 < x \leqslant 1 \\ 0{,}2+0{,}3 & \text{dacă } 1 < x \leqslant 2 \\ 0{,}2+0{,}3+0{,}1 & \text{dacă } 2 < x \leqslant 3 \\ 0{,}2+0{,}3+0{,}1+0{,}3 & \text{dacă } 3 < x \leqslant 4 \\ 1 & \text{dacă } 4 < x \end{cases}.$$

În general, dacă f este o variabilă discretă

$$F(x) = P(f < x) = \sum_{x_i < x} P(f = x_i).$$

Graficul funcției $F(x)$ în acest caz este o funcție în scară, deoarece $F(x)$ crește prin salturi de fiecare dată cînd f ia una din valorile x_i. Între două valori vecine ale variabilei f, funcția $F(x)$ este constantă. În cazul exemplului de mai sus, $F(x)$ are cinci puncte de discontinuitate (0, 1, 2, 3, 4), numite salturi. Deci, graficul va fi cel din figura 1.

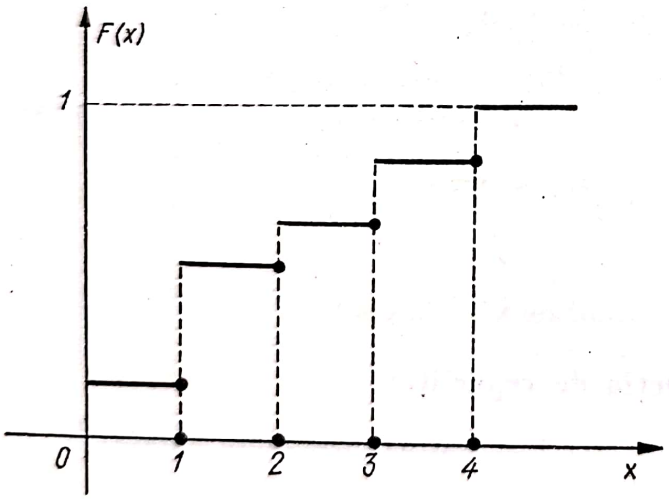

Fig. 1

Vom stabili acum cîteva teoreme privind funcțiile de repartiție.

Teoremă. *Fie f o variabilă aleatoare, F funcția de repartiție corespunzătoare și x_1 și x_2 $(x_1 < x_2)$ două numere reale, atunci*

(a) $P(x_1 \leqslant f < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

(b) $P(x_1 < f < x_2) = F(x_2) - F(x_1) - P(f = x_1)$.

(c) $P(x_1 < f \leqslant x_2) = F(x_2) - F(x_1) - P(f = x_1) + P(f = x_2)$.

(d) $P(x_1 \leqslant x \leqslant x_2) = F(x_2) - F(x_1) + P(f = x_2)$.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Să notăm cu A, B, C și D următoarele mulțimi

$A = \{\omega; f(\omega) < x_1\}$, $B = \{\omega: f(\omega) < x_2\}$, $C = \{\omega; f(\omega) = x_1\}$ și $D = \{\omega: f(\omega) = x_2\}$.

Între cele patru mulțimi avem relațiile de incluziune:

$$A \subseteq B, \quad A \cup C \subseteq B, \quad A \subseteq B \cup D$$

Aplicînd proprietățile probabilităților obținem:

$$P(B \cap \mathbf{C}A) = P(B) - P(A),$$
$$P(B \cap \mathbf{C}(A \cup C)) = P(B) - P(A) - P(C),$$
$$P(B \cup D) \cap \mathbf{C}(A \cup C) = P(B) - P(A) - P(C) + P(D),$$
$$P(B \cup D \cap \mathbf{C}A) = P(B) - P(A) + P(D).$$

Ținînd seama de aceste relații, rezultă egalitățile (a), (b), (c) și (d).

Teoremă. *Dacă F este funcția de repartiție a variabilei f, atunci*

(a) $F(x_1) \leqslant F(x_2)$ *dacă* $x_1 < x_2$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$ și $\lim\limits_{x=-\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$

(c) $F(x-0) = F(x)$.

Demonstrație. Relația (a) arată că orice funcție de repartiție este crescătoare. Din relațiile (a) și (b) deducem că orice funcție de repartiție este mărginită, $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$, oricare ar fi x.

Dacă ținem seama că $F(x-0) = \lim\limits_{\substack{y\to x \\ y<x}} F(y)$, atunci relația (c) arată continuitatea la stînga a funcțiilor de repartiție.

a) Din teorema precedentă avem

$$P(x_1 \leqslant f < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Cum $P(x_1 \leqslant f < x_2) \geqslant 0$, rezultă $F(x_2) \geqslant F(x_1)$, oricare ar fi $x_1 < x_2$, deci $F(x)$ este o funcție nedescrescătoare.

b) Să notăm cu A_n mulțimea

$$A_n = \{\omega : n-1 \leqslant f(\omega) < n\}.$$

Cum $P(f < \infty) = 1$, avem

$$P(f < \infty) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(A_n).$$

Însă

$$\sum_{i=1-n}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1-n}^{n} [F(i) - F(i-1)] = F(n) - F(-n).$$

Dacă facem pe $n \to \infty$, atunci $F(n) - F(-n)$ tinde către 1 și deci

$$F(+\infty) = 1 \text{ și } F(-\infty) = 0.$$

c) Pentru a arăta că funcția de repartiție este o funcție continuă la stînga

$$F(x - 0) = F(0),$$

fie $x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \ldots$ un șir crescător care converge către x. Să notăm cu

$$B_n = \{\omega : x_n \leqslant f(\omega) < x\}.$$

Între mulțimile B_n avem relațiile $B_i \subset B_j$ pentru $i > j$ și $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \Phi$. Ținînd seama de teorema continuității a lui Kolmogorov, avem

$$0 = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} \{F(x) - F(x_n)\} = F(x) - \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x) - F(x - 0)$$

și deci

$$F(x - 0) = F(x).$$

Teoremă. *Mulțimea punctelor de discontinuitate a funcției de repartiție F este cel mult numărabilă.*

Demonstrație. Dacă x_0 este un punct de discontinuitate al funcției F, atunci saltul funcției în punctul x_0 este

$$F(x_0 + 0) - F(x_0 - 0) > 0.$$

Să observăm că funcția F are cel mult un salt mai mare ca $\frac{1}{2}$, funcția F are cel mult două salturi cuprinse între $\frac{1}{2^2}$ și $\frac{1}{2}$, deoarece $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$. În general, funcția F are cel mult $2^n - 1$ salturi cuprinse între $\frac{1}{2^n}$ și $\frac{1}{2^{n-1}}$. Atunci, numerotînd mulțimea salturilor, obținem o mulțime cel mult numărabilă.

2. Densitate de repartiție

Dacă există o funcție nenegativă $\rho(y)$ astfel încît

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(y)\, dy$$

pentru orice x, atunci numim funcția $\rho(y)$ *densitate de repartiție sau de probabilitate.*

Să observăm că dacă repartiția F are o densitate de repartiție atunci

$$\rho(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \leqslant f < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Cu alte cuvinte, densitatea de repartiție $\rho(x)$ este limita raportului dintre probabilitatea ca variabila aleatoare f să ia valori între x și $x+\Delta x$ și mărimea intervalului Δx, cînd acesta din urmă tinde către zero.

Următoarele proprietăți sînt evidente:

a) $\rho(x) \geqslant 0$, oricare ar fi x,

b) pentru orice x_1 și x_2 avem

$$P(x_1 \leqslant f < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\, dx \quad \text{și}$$

c) $$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\, dx = 1.$$

Exemple. Vom da cîteva exemple de funcții de repartiție cu densități de repartiție.

1) Să presupunem că densitatea de repartiție este dată de funcția

$$\rho(x) = Ae^{-\alpha x}$$

definită pentru $x > 0$ și $\alpha > 0$.

Să examinăm în ce caz această funcție este o densitate de repartiție. Trebuie să avem conform cu c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\, dx = 1$$

sau

$$A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x}\, dx = 1,$$

de unde rezultă că $A = \alpha$.

Deci

$$\rho(x) = \alpha\, e^{-\alpha x} \quad \text{pentru } x > 0.$$

Funcția de repartiție va fi dată de

$$F(x) = \alpha\int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha y}\, dy \text{ dacă } x > 0 \text{ și}$$

$F(x) = 0$ dacă $x \leqslant 0$.

2) Fie

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leqslant 0 \\ ax^2 & \text{pentru } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{pentru } x > 1. \end{cases}$$

Să vedem în ce caz această funcție este o funcție de repartiție. Trebuie să avem pentru $x = 1$, $ax^2 = 1$, deci $a = 1$ (aceasta din cauza continuității la stînga a funcției $F(x)$).

Densitatea de repartiție va fi dată de

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ 2x & \text{dacă } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

3) Să presupunem că variabila aleatoare f are următoarea densitate de repartiție

$$\rho(x) = \begin{cases} a \cos x \text{ dacă } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 \quad \text{dacă } x < -\frac{\pi}{2} \text{ sau } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Trebuie să avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx = 1 \quad \text{sau } a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1,$$

de unde rezultă că trebuie să avem $a = \frac{1}{2}$.

Funcția de repartiție corespunzătoare este dată de

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \cos x \, dx = \frac{1}{2}(\sin x + 1),$$

deci

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{dacă } x < -\frac{\pi}{2} \text{ sau } x > \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}(\sin x + 1) \text{ dacă } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

În statistică au o largă folosire variabilele aleatoare care iau cel mult o infinitate numărabilă de valori; asemenea variabile aleatoare se numesc discrete. Variabilele aleatoare discrete au ca funcție de repartiție o funcție în scară.

Variabilele aleatoare care au funcțiile de repartiție continue pe toată dreapta și sînt derivabile în toate punctele, cu excepția unei mulțimi cel mult numărabile, se numesc variabile aleatoare continue.

Aceste două tipuri de variabile aleatoare nu epuizează mulțimea variabilelor aleatoare.

3. Funcția de repartiție multidimensională

În spațiul R^n să notăm cu $\mathfrak{B}^n$ tribul mulțimilor boreliene. Dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sînt n variabile aleatoare definite pe Ω cu valori reale, atunci aplicația $\omega \to (f_1(\omega), f_2(\omega), \ldots, f_n(\omega))$, definită pe Ω cu valori în R^n, se numește vector aleator.

Dacă $B \in \mathfrak{B}^n$, adică B este mulțimea boreliană în R^n, atunci $f^{-1}(B) = \{\omega;\ (f_1(\omega), \ldots, f_n(\omega)) \in B\}$ aparține corpului K. În cele ce urmează un vector aleator îl vom nota prin $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Fie $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ un vector aleator, de componente $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Vom numi funcție de repartiție a acestui vector, și o vom nota prin $F(x_1, \ldots, x_n)$, funcția definită prin

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(f_1 < x_1, f_2 < x_2, \ldots, f_n < x_n).$$

Să notăm cu:

$$I = \{(u_1, u_2, \ldots, u_n);\ u_1 < x_1, \ldots, u_n < x_n\}$$

și

$$E_f = \{\omega : f(\omega) \in I\};$$

putem defini funcția de repartiție prin:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(E_f).$$

Ca și în cazul pentru $n = 1$, funcția de repartiție are următoarele proprietăți:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

este o funcție crescătoare; dacă

$$x_1 \leqslant x_1', \ldots, x_n \leqslant x_n' \text{ atunci } F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant F(x_1', x_2', \ldots, x_n').$$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2}$$

este o funcție continuă la stînga și

$$F(-\infty, \ldots, -\infty) = 0 \text{ și } F(+\infty, \ldots, +\infty) = 1, \tag{3}$$

unde

$$F(-\infty, \ldots, -\infty) = \lim_{x_i \to -\infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Vom mai introduce încă o condiție, care în cazul $n = 1$ este îndeplinită. Să considerăm expresia

$$P(a_k \leqslant f_k < b_k;\quad k = 1,2, \ldots, n) = \sum (-1)^{\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k} F(c_1, c_2, \ldots, c_n), \quad (\alpha)$$

unde

$c_k = \varepsilon_k\ a_k + (1 - \varepsilon_k)\ b_k$, iar ε_k sînt independente și iau valorile 0 și 1.

În particular, pentru $n = 2$, condiția de mai sus devine

$$P(a_1 \leqslant f_1 < b_1,\ a_2 \leqslant f_2 < b_2) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2),$$

deoarece termenii din membrul al doilea se obțin pentru

$$\varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 = 0;\ \varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = 0;\ \varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 = 1;\ \varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = 1.$$

Să vedem acum ce interpretare probabilistică putem da expresiei (α).

Să notăm cu

$$A_k = \{f_k < a_k\}$$

și cu

$$B_k = \{f_k < b_k\}$$

pentru $k = 1,2, \ldots, n$ și fie:

$$B = \bigcap_{k=1}^{n} B_k \quad \text{și} \quad A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Atunci

$$P(a_k \leqslant f_k < b_k;\ k = 1,2, \ldots, n) = P(\mathbf{C}A \cap B) = P(B)\,(1 - P(A)) =$$

$$= P(B) - P(A.B) = P(B) - P\Big(\bigcup_{k=1}^{n}(A_k \cap B)\Big).$$

Dacă notăm acum $C_k = A_k \cap B$, se obține relația (α).

Deoarece $P(a_k \leqslant f_k < b_k;\ k = 1,2, \ldots, n) \geqslant 0$, rezultă următoarea condiție:

$$\sum (-1)^{\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k} F(\varepsilon_1 a_1 + (1 - \varepsilon_1)b_1, \varepsilon_2 a_2 + (1 - \varepsilon_2)\, b_2, \ldots, \varepsilon_n a_n + (1 - \varepsilon_n)\, b_n) \geqslant 0, \quad (\beta)$$

unde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ sînt independente și iau valorile 0 și 1.

Condiția (β) nu se obține din condițiile (1), (2), (3) de mai sus. Dacă funcția de repartiție $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ verifică condițiile (1), (2) și (3) nu rezultă că și condiția (β) este îndeplinită. Să arătăm aceasta printr-un exemplu.

Fie $n = 2$ și

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x_1 + x_2 \geqslant 0 \\ 0 \text{ dacă } x_1 + x_2 < 0. \end{cases}$$

Se observă imediat că condițiile (1), (2) și (3) sînt îndeplinite (funcția este crescătoare, continuă la stînga și $F(-\infty, -\infty) = 0, F(+\infty, +\infty) = 1$. Însă condiția ($\beta$) nu este îndeplinită.

Într-adevăr,

$$F(2, 2) - F(-1, 2) - F(2, -1) + F(-1, -1) = 1 - 1 - 1 + 0 = -1.$$

Dacă însă condițiile (1), (2), (3) și (β) sînt îndeplinite, atunci funcția

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este funcția de repartiție corespunzătoare unui vector aleator.

Densitatea de repartiție $\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ corespunzătoare funcției de repartiție $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dacă există, este dată de:

$$\rho(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}.$$

Din (β) rezultă că $\rho(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$.

Dacă $\rho(x_1, \ldots, x_n)$ există și este continuă, atunci

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} \rho(u_1, u_2, \ldots, u_n)\, du_1 du_2 \ldots du_n$$

și în plus se vede că

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(u_1, u_2, \ldots, u_n)\, du_1 du_2 \ldots du_n = 1.$$

Dacă $f_1, \ldots, f_n$ sînt independente și fiecare au o densitate de repartiție și dacă $\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ există, atunci $\rho(x_1, \ldots, x_n) = \rho(x_1)\, \rho(x_2) \ldots \rho(x_n)$, unde $\rho(x_k)$ este densitatea de repartiție corespunzătoare variabilei f_k, și reciproc.

4. Variabile aleatoare independente

Pe cîmpul $\{\Omega, K, P\}$ să considerăm dată o familie de variabile aleatoare $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$, unde I este o familie de indici, notăm cu $\mathfrak{B}^{(1)}$ tribul mulțimilor boreliene de pe dreapta reală.

Definiție. Familia $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ este o familie de variabile aleatoare independente în sensul Steinhaus-Kaç, dacă pentru orice familie finită J, $J \subset I$ și orice familie de mulțimi boreliene $(B_\alpha)_{\alpha \in I}$ are loc relația

$$P\left(\bigcap_{\alpha \in J} f_\alpha^{-1}(B_\alpha)\right) = \prod_{\alpha \in J} P\left(f_\alpha^{-1}(B_\alpha)\right).$$

Mulțimea familiilor de variabile aleatoare independente în sensul Steinhaus-Kaç se notează (SK).

Dacă familia $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ este formată numai cu două funcții (f_1, f_2) și drept mulțimi B_α luăm semidreptele $B_1 = (-\infty, a_1)$, $B_2 = (-\infty, a_2)$, atunci, dacă variabilele sînt independente, avem

$$P(f_1 < a_1,\ f_2 < a_2) = P(f_1 < a_1) \cdot P(f_2 < a_2)$$

sau încă

$$F(a_1, a_2) = F_1(a_1) \cdot F_2(a_2),$$

unde F este funcția de repartiție bidimensională, iar F_1 și F_2 sînt, respectiv, funcțiile de repartiție pentru variabilele f_1 și f_2.

Teoremă. *Condiția necesară și suficientă ca familia de variabile aleatoare $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ să aparțină la (SK) este ca pentru orice familie finită $J \subset I$.*

$$P\left(\bigcap_{\alpha \in J} (f_\alpha < a)\right) = \prod_{\alpha \in J} P(f_\alpha < a).$$

Condiția aceasta se poate scrie și sub forma:

$$P\left(\bigcap_{\alpha\in J} f_\alpha^{-1}(-\infty, a_\alpha)\right) = \prod_{\alpha\in J} P\left(f_\alpha^{-1}(-\infty, a_\alpha)\right),$$

de unde se vede necesitatea condiției. Suficiența condiției rezultă din faptul că tribul mulțimilor boreliene este generat de semidreptele $(-\infty, a)$ și din faptul că aplicațiile f sînt permutabile cu reuniunile, intersecțiile și complementarele.

5. Funcția de repartiție condiționată

În corpul borelian K să fixăm evenimentul B și să considerăm variabila aleatoare $f: \Omega \to R$, a cărei funcție de repartiție este $F(x)$.

Să notăm

$$A_{ab} = \{\omega;\ x - a \leqslant f(\omega) < x + b\};$$

atunci, după definiția probabilităților condiționate

$$P(B/A_{ab}) = P(A_{ab})\cdot P(B/A_{ab}) = [F(x+b) - F(x-a)]\cdot P(B/A_{ab});$$

de aici

$$P(B/A_{ab}) = \frac{P(B \cap A_{ab})}{F(x+b) - F(x-a)}.$$

Definiție. Se numește probabilitatea condiționată a evenimentului B, pentru condiția $f(\omega) = x$,

$$\lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{P(B \cap A_{ab})}{F(x+b) - F(x-a)}$$

dacă limita există. Această probabilitate se notează cu $P(B/x)$.

Pentru fiecare B fix, limita de mai sus există aproape pentru orice x. Pentru x fix, funcția de mulțime $B \to P(B/x)$ este o probabilitate definită pe un subcorp din K.

Fie g o altă variabilă aleatoare definită pe Ω, să luăm drept eveniment $\mathfrak{B}$ evenimentul

$$B = \{\omega;\ g(\omega) < y\}$$

și să presupunem că probabilitatea $P(B/x)$ există, atunci vom nota această probabilitate prin $\Phi(y/x) = P(g < y/x)$. Această probabilitate reprezintă repartiția variabilei g cînd variabila f ia valoarea x.

Să presupunem cunoscută repartiția bidimensională a vectorului aleator $\omega \to (f(\omega), g(\omega))$, $F(x, y)$, atunci

$$\Phi(y/x) = \lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{F(x+b, y) - F(x-a, y)}{F(x+b, \infty) - F(x-a, \infty)}$$

dacă limită din membrul al doilea există.

Teoremă. *Dacă $P(B/x)$ este integrabilă în raport cu funcția $F(x)$, atunci*

$$P(B) = \int_{-\infty}^{\infty} P(B/x)\, dF(x).$$

Într-adevăr, să considerăm o diviziune a dreptei R prin punctele x_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ și să notăm cu A_i evenimentul

$$A_i = \{\omega;\ x_i \leqslant f(\omega) < x_{i+1}\};$$

atunci cum $\Omega = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} A_i$,

$$P(B) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} P(B \cap A_i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} P(A_i) \cdot P(B/A_i) =$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} P(B/A_i)\ [F(x_{i+1}) - F(x_i)].$$

Să considerăm intervalul $[x_i, x_{i+1})$ și în acest interval să luăm un punct z_i; atunci, dacă punem $a_i = z_i - x_i$ și $b_i = x_{i+1} - z_i$, evenimentul A_i se scrie

$$A_i = A_{a_i b_i}$$

și

$$P(B/A_i) = P(B/A_{a_i b_i}).$$

Conform definiției probabilităților $P(B/x)$, avem

$$\lim_{(a_i, b_i) \to (0,0)} P(B/A_i) = \lim_{(a_i, b_i) \to (0,0)} P(B/A_{a_i b_i}) = P(B/z_i).$$

Pentru $\varepsilon > 0$, putem alege punctele a_i, b_i, astfel încît

$$|P(B/A_i) - P(B/z_i)| < \frac{\varepsilon}{2^n};$$

atunci

$$P(B) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} P(B/z_i)\ [F(x_{i+1}) - F(x_i)] + \sum_{i=-\infty}^{\infty} R_i [F(x_{i+1}) - F(x_i)],$$

unde $|R_i| < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Trecînd la limită cînd $\lambda = \max_i (x_{i+1} - x_i)$ tinde către zero, avem

$$P(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(B/x)\, dF(x).$$

Dacă luăm acum $B = \{\omega;\ g(\omega) < y\}$, atunci dacă Φ este funcția de repartiție a variabilei g,

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y/x)\, dF(x).$$

Să presupunem că funcțiile de repartiție $\Phi(y)$ și $\Phi(y/x)$ au densități de repartiție, atunci

$$\rho(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(y/x)\, dF(x).$$

Din relațiile de mai sus rezultă o formulă analogă cu aceea a lui Bayes, și anume

$$\rho(x/y) = \frac{\rho(y/x)\, \rho_1(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho(y/x)\, \rho_1(u)\, du}.$$

Toate aceste rezultate se generalizează și pentru funcții de repartiție cu mai multe dimensiuni.

Fie f_1 și f_2 două variabile aleatoare cu funcțiile de repartiție $F(x)$, respectiv $G(y)$, și densități de repartiție $\rho_1(x)$ și $\rho_2(y)$. Să notăm cu $H(x,y)$ funcția de repartiție bidimensională a variabilei (f_1, f_2) iar cu $\rho(x,y)$ densitatea de repartiție corespunzătoare. Să presupunem că $\rho(x, y)$ este o funcție continuă.

Să notăm cu $F(x/y)$ funcția de repartiție condiționată definită prin

$$F(x/y) = P_{f_2=y}(f_1 < x). \tag{1}$$

Densitatea de repartiție corespunzătoare o notăm cu $\rho(x/y)$.

Avem

$$\rho(x/y) = \frac{\partial F(x|y)}{\partial x}.$$

Din (1) rezultă că

$$F(x/y) = \frac{P(f_1 < x)\, \rho_{f_1<x}(y)}{\rho_2(y)}$$

și

$$\rho_{f_1<x}(y) = \frac{\partial G_{f_1<x}(y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{H(x,y)}{F(x)}\right).$$

Deci

$$F(x/y) = \frac{1}{\rho_2(y)} \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}$$

și

$$\rho(x/y) = \frac{\rho(x,y)}{\rho_2(y)}.$$

Analog avem

$$\rho(y/x) = \frac{\rho(x,y)}{\rho_1(x)}.$$

Din ultimele două egalități rezultă că

$$\rho(x/y) = \frac{\rho(y/x)\, \rho_1(x)}{\rho_2(y)}, \tag{2}$$

deoarece avem $\rho(x,y) = \rho(y/x)\, \rho_1(x)$.

Integrînd egalitatea (2) obținem

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x|y)\,dx = \frac{1}{\rho_2(y)} \int_{-\infty}^{\infty} g(y|x)\,\rho_1(x)\,dx$$

sau

$$\rho_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(y|x)\,\rho_1(x)dx.$$

Funcția de repartiție este dată de

$$G(y) = \int_{-\infty}^{\infty} G(y|x)\,\rho_1(x)\,dx,$$

unde $G(y|x)$ este funcția de repartiție condiționată a lui y față de x.

6. Compunerea funcțiilor de repartiție

a) Fie f și g două variabile aleatoare independente și fie $h = f + g$. Să notăm cu $p(x)$ și $q(y)$ densitățile de repartiție ale variabilei f, respectiv g. Să arătăm că densitatea de repartiție a variabilei h pe care o notăm cu $\rho(z)$ este dată de

$$\rho(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,q(z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(z-x)\,q(x)\,dx.$$

Notăm cu $R(z)$ funcția de repartiție a variabilei h. Prin definiție avem:

$$R(z) = \iint\limits_{x+y<z} p(x)\,q(y)\,dx\,dy.$$

Făcînd schimbarea de variabila $u = x$, $v = x + y$ obținem

$$R(z) = \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(u)\,q(v-u)\,dv \right) dv.$$

Diferențiind în raport cu z funcția $R(z)$, rezultă

$$\rho(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u)\,p(z-u)\,du.$$

Aceasta este densitatea de repartiție a variabilei $f + g$.

Aplicație. Fie f și g două variabile independente cu repartiția uniformă în intervalul $[a, b]$

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{dacă} \quad a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{dacă} \quad x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Să calculăm densitatea de repartiție a variabilei $f + g$.

Scanned with OKEN Scanner

Notăm cu $\rho(z)$ densitatea de repartiție a sumei $f + g$. Prin definiție avem

$$\rho(z) = \int_a^b \rho_f(u)\ \rho_g(z-u)\ du = \frac{1}{b-a}\int_a^b \rho(z-u)\ du.$$

În integrala de sus să facem schimbarea de variabilă $z - u = t$. Avem

$$\rho(z) = \frac{1}{b-a}\int_{z-b}^{z-a} \rho_g(t)\ dt,$$

unde $2a \leqslant z \leqslant 2b$.

Dacă $z - b < a$, adică $z < a + b$, atunci $z - a < b$ și descompunînd integrala avem

$$\rho(z) = \frac{1}{b-a}\left\{\int_{z-b}^{a} \rho_g(t)\ dt + \int_a^{z-a} \rho_g(t)\ dt\right\} = \frac{z-2a}{(b-a)^2}.$$

Dacă $z - b > a$, atunci $z - a > b$ și

$$\rho(z) = \frac{1}{b-a}\left\{\int_{z-b}^{b} \rho_g(t)\ dt + \int_b^{z-a} \rho_g(t)\ dt\right\} = \frac{2b-z}{(b-a)^2}.$$

Adunînd rezultatele obținem

$$\rho(z) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } z \leqslant a \\ \dfrac{z-2a}{(b-a)^2} & 2a < z \leqslant a+b \\ \dfrac{2b-z}{(b-a)^2} & a+b < z \leqslant 2b \\ 0 & \text{dacă } b < z. \end{cases}$$

b) Dacă f și g sînt independente și $\rho_1(x)$ respectiv $\rho_2(y)$ sînt densitățile lor de repartiție, pentru funcția de repartiție a variabilei $f \cdot g$ și $\frac{f}{g}$ avem:

$$P(fg < z) = \iint_{xy<z} \rho_1(x)\ \rho_2(y)\ dx\ dy \text{ și } P\left(\frac{f}{g} < z\right) = \iint_{\frac{x}{y}<z} \rho_1(x)\ \rho_2(y)\ dx\ dy.$$

Diferențiind relațiile de mai sus obținem densitățile corespunzătoare variabilelor fg și $\frac{f}{g}$. Să le notăm cu $s(z)$ respectiv cu $h(z)$.

În cazul în care g este nenegativă, adică $\rho_2(y) = 0$ dacă $y < 0$, atunci

$$P(fg < z) = \int_0^\infty \rho_2(y)\left[\int_{-\infty}^{\frac{z}{y}} \rho_1(x)\ dx\right] dy$$

și deci

$$s(z) = \int_0^\infty \rho_2(y)\ \rho_1\left(\frac{z}{y}\right)\frac{dy}{y}$$

Analog

$$P\left(\frac{f}{g} < z\right) = \int_0^\infty \rho_2(y)\left[\int_{-\infty}^{zy} \rho_1(x)\,dx\right]dy$$

de unde

$$h(z) = \int_0^\infty y\rho_2(y)\,\rho_1(zy)\,dy.$$

În cazul în care g ia și valori negative obținem:

$$s(z) = \int_{-\infty}^\infty \rho_2(y)\,\rho_1\left(\frac{z}{y}\right)\frac{dy}{|y|}$$

și

$$h(z) = \int_{-\infty}^\infty |y|\rho_2(y)\,\rho_1(zy)\,dy.$$

Aplicații. Fie f și g două variabile aleatoare independente, avînd densitatea de repartiție $\frac{1}{2}e^{-|x|}$. Să calculăm densitatea de repartiție a variabilei $\frac{f}{g}$.

Densitatea de repartiție a variabilei $\frac{f}{g}$ este dată de

$$\rho(z) = \int_{-\infty}^\infty |u|\,\rho_2(u)\,\rho_1(uz)\,du,$$

unde ρ_1 și ρ_2 sînt densitățile respective ale variabilelor f și g.

În cazul acestei aplicații avem:

$$\rho(z) = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty |u|\,e^{-|u|}e^{-|uz|}\,du.$$

Dezvoltînd calculele, rezultă

$$\rho(z) = \frac{1}{4}\left\{\int_{-\infty}^0 -ue^{u(1+|z|)}\,du + \int_0^\infty ue^{-u(1+|z|)}\,du\right\} = \frac{1}{2}\int_0^\infty ue^{-u(1+|z|)}\,du.$$

Integrînd prin părți se obține

$$\rho(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{(1+|z|)^2}$$

7. Densitatea de repartiție compusă

Fie f o variabilă aleatoare a cărei densitate de repartiție $\rho_1(x)$ este cunoscută, $y = \varphi(x)$ o funcție strict crescătoare definită pe mulțimea valorilor variabilei f. Ne propunem să determinăm densitatea de repartiție a variabilei $g = \varphi(f)$ Să presupunem în plus că $\varphi(x)$ este derivabilă și $\varphi'(x) \neq 0$.

Teoremă. *În condițiile de mai sus densitatea de repartiție a variabilei g este dată de*

$$\rho(y) = \frac{\rho_1(\varphi^{-1}(y))}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|}$$

unde $x = \varphi^{-1}(y)$ *este inversa funcției* $y = \varphi(x)$.

Demonstrație. Să presupunem că $\varphi'(x) > 0$.

Atunci

$$\rho(y)\,\Delta y = P(y \leqslant g < y + \Delta y).$$

Rezultă că $\rho(y)\,\Delta y$ este probabilitatea evenimentului

$$\varphi^{-1}(y) \leqslant f < \varphi^{-1}(y + \Delta y).$$

Cum φ^{-1} este continuă și derivabilă, putem scrie

$$\varphi^{-1}(y + \Delta y) = \varphi^{-1}(y) + \frac{\Delta y}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))} + 0(\Delta y),$$

de unde

$$P(y \leqslant g < y + \Delta y) = \frac{\rho_1(\varphi^{-1}(y))}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}\Delta y + 0(\Delta y).$$

Din egalitatea de mai sus rezultă că

$$\rho(y) = \frac{\rho_1(\varphi^{-1}(y))}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}.$$

Dacă $\varphi'(x) < 0$, atunci $-g = -\varphi(f)$ și obținem

$$\rho(y) = -\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}\rho_1(-\varphi^{-1}(y)), \text{ de unde}$$

rezultă egalitatea căutată.

Aplicație. Fie f o variabilă aleatoare care urmează legea de repartiție a cărei densitate de repartiție este

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Să calculăm densitatea de repartiție a variabilei $g = e^{f^2}$.

Avem $f = \sqrt{\log g}$; deci $\varphi^{-1}(y) = \sqrt{\log y}$. Aplicînd formula de mai sus obținem

$$\rho(y) = \frac{1}{2y\sqrt{2\pi \log y}} \text{ dacă } y > 1.$$

Teoremă. *Fie* X *și* Y *două variabile aleatoare care au densitatea de repartiție* $\rho(x,y)$ *și* U *și* V *un alt cuplu de variabile aleatoare cu densitatea* $\delta(u, v)$. *Dacă*

$$x = \mu(U,V),\ y = \nu(U,V),$$

atunci

$$\delta(u,v) = \rho[\mu(u,v),\ \nu(u,v)]\,J(u,v)$$

unde $J(u, v)$ *este determinantul funcțional al lui* x *și* y *în raport cu* u *și* v.

Demonstrație. Fie M un punct aleator de coordonate X și Y în planul Ox, Oy și M' un punct aleator de coordonate U și V în planul Ou, Ov.

Scanned with OKEN Scanner

Cînd M' parcurge în planul u, v un domeniu oarecare D', M parcurge în planul x, y un domeniu D ce se deduce din D' prin transformarea

$$x = \mu(u,v), \quad g = \nu(u,v).$$

Rezultă că

$$P(M \subset D) = P(M' \subset D'),$$

cu alte cuvinte că

$$\iint_D \rho(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D'} \delta(u,v)\, du\, dv.$$

În prima integrală să facem schimbarea de variabilă

$$x = \mu(u,v), \quad y = \nu(u,v).$$

Obținem

$$\iint_D \rho(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D'} \rho[\mu(u,v), \nu(u,v)]\, J(u,v)\, du\, dv,$$

unde

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Putem să scriem atunci că

$$\iint_{D'} \rho[\mu(u,v), \nu(u,v)]\, J(u,v)\, du\, dv = \iint_{D'} \delta(u,v)\, du\, dv,$$

de unde deducem că

$$\rho[\mu(u,v), \nu(u,v)]\, J(u,v) = \delta(u,v).$$

O b s e r v a ț i e. Teorema de mai sus se demonstrează cu ușurință în cazul unei repartiții n-dimensionale.

8. Mediană, cuantile, modă, asimetrie și exces

Fie f o variabilă aleatoare cu funcție de repartiție $F(x)$. Vom numi mediană și o vom nota prin $\mu(f)$ numărul pentru care

$$P(f \geqslant \mu(f)) \geqslant \frac{1}{2} \leqslant P(f \leqslant \mu(f))$$

sau

$$F(\mu(f)) \leqslant \frac{1}{2} \text{ și } F(\mu(f) + 0) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Să stabilim cîteva proprietăţi ale medianei.

Teoremă. *Fie f o variabilă aleatoare. Atunci*

$$|\mu(f) - M(f)| \leqslant \sqrt{2}\sigma(f).$$

Demonstraţie. Din egalitatea lui Cebîşev avem

$$P(|f - M(f)| \geqslant \sqrt{2}\sigma(f)) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Ţinînd seama acum de definiţia medianei, rezultă că

$$M(f) - \sqrt{2\sigma^2(f)} \leqslant \mu(f) \leqslant M(f) + \sqrt{2\sigma^2(f)}.$$

Fie f şi f' două variabile aleatoare independente care au aceeaşi funcţie de repartiţie; notăm cu f^s variabila $f - f'$ atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice a avem relaţiile:

$$\frac{1}{2}P(f - \mu(f) \geqslant \varepsilon) \leqslant P(f^s \geqslant \varepsilon)$$

şi

$$\frac{1}{2}P(|f - \mu(f)| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(|f^s| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2P\left(|f - a| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Într-adevăr, dacă $f^s = f - f'$, unde f şi f' sînt variabile aleatoare independente care urmează aceeaşi lege de repartiţie, atunci

$$\mu(f) = \mu(f') = \mu$$

şi deci

$$P(f^s \geqslant \varepsilon) = P((f - \mu) - (f' - \mu) \geqslant \varepsilon) \geqslant P(f - \mu \geqslant \varepsilon, f' - \mu \leqslant 0) =$$
$$= P(f - \mu \geqslant \varepsilon) \cdot P(f' - \mu \leqslant 0).$$

Însă din definiţia medianei $P(f' - \mu \leqslant 0) \leqslant \frac{1}{2}$ şi deci

$$P(f^s \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{2}P(f - \mu \geqslant \varepsilon).$$

Prima parte a celei de-a doua inegalităţi rezultă imediat ţinînd seama de prima inegalitate şi scriind aceeaşi inegalitate pentru $-f$.

Ne mai rămîne să arătăm că

$$P(|f^s| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2P\left(|f - a| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Avem

$$P(|f^s| \geqslant \varepsilon) = P(|(f - a) - (f' - a)| \geqslant \varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant P\left(|f - a| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|f' - a| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) = 2P\left(|f - a| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Din ultima inegalitate rezultă că suma abaterilor în raport cu un punct de abscisă a este minimă, cînd această abscisă coincide cu valoarea medianei.

Cuantile. Asemănător cu definiția medianei se definesc cuantile.

Prima cuantilă este o valoare pentru care

$$F(x_1) \leqslant \frac{1}{4}, \qquad F(x_1 + 0) \geqslant \frac{1}{4};$$

a doua cuantilă este mediana, iar a treia cuantilă este valoarea pentru care

$$F(x_3) \leqslant \frac{3}{4}, \qquad F(x_3 + 0) \geqslant \frac{3}{4}.$$

Exemplu. Să luăm repartiția uniformă pe intervalul (a, b); funcția de repartiție este (fig. 2).

Moda. Fie f o variabilă aleatoare care are densitate de repartiție ρ. Se numește modă și se notează cu M_0 maximul funcției ρ. Dacă densitatea ρ are mai multe puncte de maxim, atunci variabila se numește plurimodală.

Exemplu. Să considerăm variabila aleatoare f cu densitatea de repartiție

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Se vede că pentru $x = 0$, funcția ρ are un maxim, $\rho(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ prin urmare $M_0 = 0$.

Între valoarea medie, mediană și modă există o relație aproximativă foarte des folosită în statistică, numită relația lui Pearson,

$$M_0 = M + 3(Me - M),$$

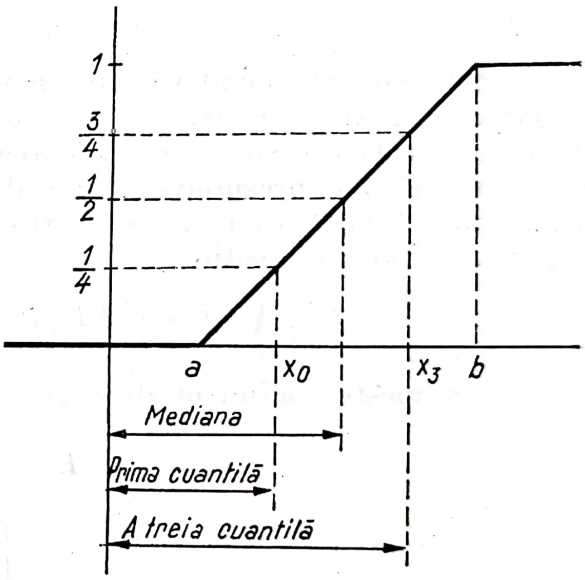

Fig. 2

unde M este valoarea medie*, Me mediana și M_0 moda.

Asimetrie. Fie f o variabilă aleatoare pentru care f^3 este variabilă sumabilă; notăm cu $m = M(f)$ valoarea medie și cu

$$\mu_3 = M[(f - m)^3] = \int_\Omega (f - m)^3 P(d\omega)$$

sau

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^3 dF(x)$$

unde F este funcția de repartiție a variabilei f. Dispersia variabilei f am definit-o prin:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 dF(x).$$

* Valoarea medie a variabilei f este egală cu $M(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) = \int_\Omega f(\omega) P(d\omega$

Se numește asimetrie și se notează cu S_k raportul

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Coeficientul S_k de asimetrie are același semn cu momentul μ_3. Pentru exemplificare să presupunem că f are densitatea ρ unimodală, atunci graficele densităților pentru $S_k > 0$ și $S_k < 0$ sînt de forma (fig. 3).

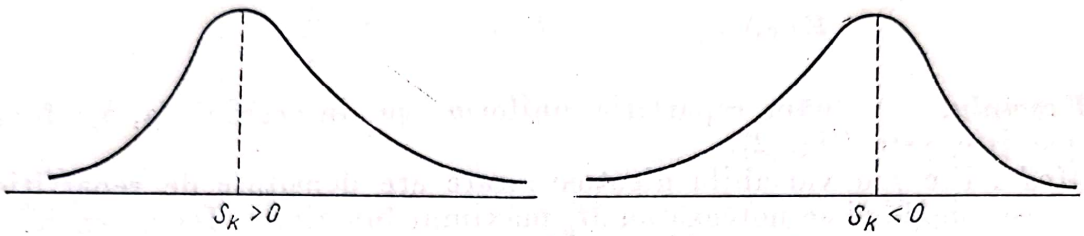

Fig. 3

Asimetria este pozitivă dacă moda este la stînga valorii medii și este negativă în cazul contrar. Se vorbește adesea de asimetrie dreaptă sau stîngă. Pentru repartițiile simetrice valoarea medie coincide cu moda.

Excesul. Să presupunem variabila aleatoare f, cu puterea a patra sumabilă, să notăm cu μ_4 momentul de ordinul patru al variabilei $f - m$ (m fiind valoarea medie)

$$\mu_4 = \int_\Omega (f - m)^4 P(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^4 dF(x).$$

Se numește coeficient de exces și se notează E, coeficientul

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

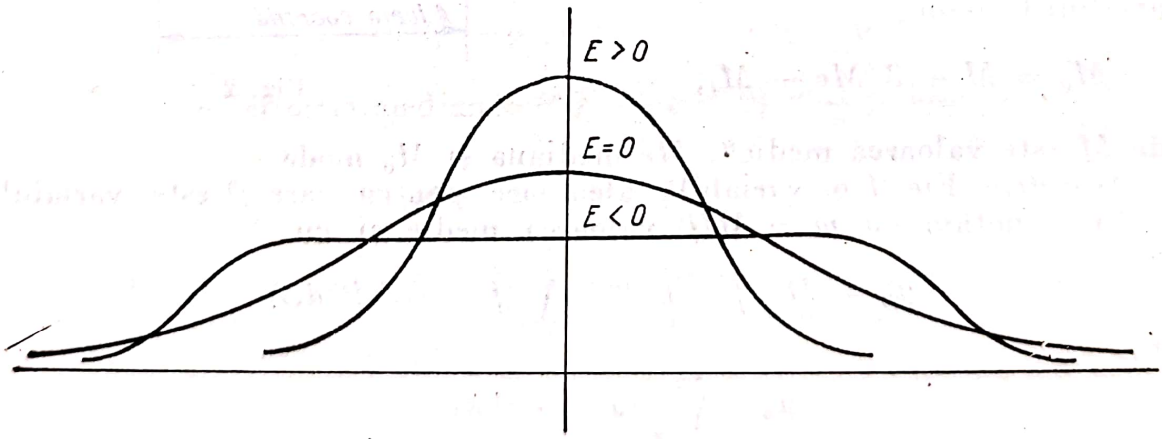

Fig. 4

Coeficientul E concretizează graficele densităților de repartiție (fig. 4) față de densitatea repartiției normale

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

pentru care $F = 0$. Repartițiile pentru care $E > 0$ se numesc leptocurtice, cele cu $E < 0$, platocurtice iar cele cu $E = 0$ mezocurtice. (Coeficientul E se numește adesea în statistică curtasis.)

§ 4. Șiruri de variabile aleatoare

1. Tipuri de convergență

Fie $\{\Omega, K, P\}$ un cîmp de probabilitate complet aditiv $\{f_n\}_n$ un șir de variabile aleatoare și f o variabilă aleatoare.

În calculul probabilităților o problemă principală o constituie convergența șirului $\{f_n\}_n$ către variabila f. Vom studia principalele moduri de convergență folosite în calculul probabilităților.

Pe tribul borelian K vom privi probabilitatea P ca pe o măsură de masă totală 1. Două variabile aleatoare f și g spunem că sînt „aproape sigur" egale dacă

$$P\{\omega;\, f(\omega) \neq g(\omega)\} = 0,$$

sau

$$P\{\omega;\, f(\omega) = g(\omega)\} = 1.$$

Prin urmare, două variabile aleatoare f și g spunem că sînt aproape sigur egale dacă față de măsura P sînt aproape peste tot egale.

(C_1). *Convergența aproape sigură.* Șirul $(f_n)_n$ converge aproape sigur către variabila f, dacă șirul $(f_n)_n$ nu converge către f în punctele unei mulțimi E_0 de probabilitate nulă.

Dacă șirul $(f_n)_n$ converge aproape sigur către f, vom scrie

$$f_n \to f$$

și această notație echivalează cu relația:

$$P\{\omega;\, f_n(\omega) \not\to f(\omega)\} = 0.$$

În raport cu măsura totală P șirul $(f_n)_n$ converge aproape peste tot către f.

(C_2) *Convergența în probabilitate.* Șirul de variabile aleatoare $(f_n)_n$ converge în probabilitate către variabila aleatoare f, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ și $\sigma > 0$ există numărul natural $N(\varepsilon,\sigma)$, astfel încît pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon,\sigma)$,

$$P\{\omega;\, |f_n(\omega) - f(\omega)| \geqslant \sigma\} < \varepsilon.$$

Din definiția de mai sus rezultă că șirul de variabile aleatoare $(f_n)_n$ converge în probabilitate către f, dacă

$$\lim_{n\to\infty} P\{|f_n - f| \geqslant \sigma\} = 0$$

oricare ar fi $\sigma > 0$. Cum măsura P este de masă totală 1, putem scrie că

$$\lim_{n\to\infty} P\{|f_n - f| < \sigma\} = 1.$$

Convergența în probabilitate transpune convergența în măsură din teoria măsurii.

(C_3). *Convergența tare.* Șirul de variabile aleatoare $(f_n)_n$ converge tare către variabila aleatoare f, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ și $\sigma > 0$ există un număr natural $N(\varepsilon, \sigma)$ astfel încît

$$P\{\bigcup_{n \geqslant N(\varepsilon,\sigma)} (|f_n - f| \geqslant \sigma)\} < \varepsilon.$$

Dacă șirul $(f_n)_n$ converge tare către f, atunci

$$P\{\bigcap_{n \geqslant N(\varepsilon,\sigma)} (|f_n - f| < \sigma)\} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

(C_4). *Convergența în sens Bernoulli.* Șirul de variabile aleatoare $(f_n)_n$ converge în sens Bernoulli către variabila f, dacă șirul $(F_n)_n$ converge către F în toate punctele de continuitate ale funcției F.

Funcția F_n este funcția de repartiție a variabilei f_n, iar F este funcția de repartiție a variabilei f. Dacă șirul $(f_n)_n$ converge în sens Bernoulli către f, atunci în toate punctele de continuitate ale funcției F avem

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x).$$

Convergența în sens Bernoulli se numește adesea convergență în repartiție.

2. Convergența în probabilitate

Vom trece acum să studiem cîteva dintre aceste tipuri de convergență și în special convergența în probabilitate.

Teoremă. *Dacă șirul de variabile aleatoare (f_n) converge în probabilitate către f și către g atunci*

$$P(f \neq g) = 0.$$

Demonstrație. Următoarea relație este evidentă

$$\{\omega: |f(\omega) - g(\omega)| \geqslant \sigma\} \subset \left\{\omega: |f(\omega) - f_n(\omega)| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right\} \cup \left\{\omega: |f_n(\omega) - g(\omega)| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right\},$$

de unde rezultă că

$$P(|f - g| \geqslant \sigma) \leqslant P\left(|f_n - f| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right) + P\left(|f_n - g| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right).$$

Această inegalitate fiind adevărată pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon,\sigma)$, avem

$$P(|f - g| \geqslant \sigma) < \varepsilon$$

de unde $P(|f - g| \geqslant \sigma) = 0$.

Însă

$$P(|f-g|\neq 0)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega:|f(\omega)-g(\omega)|\geqslant\frac{1}{n}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}P\left(|f-g|\geqslant\frac{1}{n}\right)=0$$

şi cu aceasta teorema este demonstrată.

Teoremă. *Dacă şirul* $(f_n)_{0\leqslant n<\infty}$ *converge în probabilitate către* f, *atunci şirul* $(|f_n|)_{0\leqslant n<\infty}$ *converge în probabilitate către* $|f|$.

Demonstraţie. Să observăm că

$$\{\omega:||f_n(\omega)|-|f(\omega)||\geqslant\sigma\}\subset\{\omega:|f_n(\omega)-f(\omega)|\geqslant\sigma\}.$$

Cum şirul (f_n) converge în probabilitate către f pentru $n\geqslant N(\varepsilon,\sigma)$

$$P(\{\omega:|f_n(\omega)-f(\omega)|\geqslant\sigma\})<\varepsilon$$

şi deci pentru orice $n\geqslant N(\varepsilon,\sigma)$

$$P(\{\omega:||f_n(\omega)|-|f(\omega)||\geqslant\sigma\})<\varepsilon,$$

cu alte cuvinte, şirul $(|f_n|)$ converge în probabilitate către $|f|$.

Teoremă. *Fie* $(f_n)_{0\leqslant n<\infty}$ *şi* $(g_n)_{0\leqslant n<\infty}$ *două şiruri de variabile aleatoare, care converg în probabilitate către* f, *respectiv către* g, *şi* α *şi* β *două numere reale. Şirul* $(\alpha f_n+\beta g_n)_{0\leqslant n<\infty}$ *converge în probabilitate către* $\alpha f+\beta g$.

Demonstraţie. Dacă $|\alpha|\neq 0$ şi $|\beta|\neq 0$, avem

$$\left\{|\alpha f_n+\beta g_n-\alpha f-\beta g|\geqslant\varepsilon\right\}\subset\left\{|\alpha|\cdot|f_n-f|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}\cup\left\{|\beta|\,|g_n-g|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}=$$

$$=\left\{|f_n-f|\geqslant\frac{\varepsilon}{2|\alpha|}\right\}\cup\left\{|g_n-g|\geqslant\frac{\varepsilon}{2|\beta|}\right\}.$$

Întrucît şirurile (f_n) şi (g_n) converg în probabilitate, rezultă imediat că

$$P(|\alpha f_n+\beta g_n-\alpha f-\beta g|\geqslant\varepsilon)<\eta;$$

şirul $(\alpha f_n+\beta g_n)$ converge în probabilitate către $\alpha f+\beta g$.

Teoremă. *Dacă şirul* $(f_n)_{0\leqslant n<\infty}$ *converge în probabilitate către* A *şi* $g(x)$ *este continuă în* A, *atunci şirul* $\{g(f_n)\}_{0\leqslant n<\infty}$ *converge în probabilitate către* $g(A)$.

Demonstraţie. Funcţia $g(x)$ fiind continuă în A, pentru orice $\varepsilon>0$ există un $\delta_\varepsilon>0$ astfel încît

$$|g(x)-g(A)|<\varepsilon,$$

dacă $|x-A|<\delta_\varepsilon$. Întrucît şirul $(f_n)_{0\leqslant n<\infty}$ converge în probabilitate către A, avem pentru $n\geqslant N(\eta,\delta_\varepsilon)$

$$P(|f_n-A|\geqslant\delta_\varepsilon)<\eta.$$

Însă

$$P(|g(f_n)-g(A)|\geqslant\varepsilon)\leqslant P(|f_n-A|\geqslant\delta_\varepsilon),$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă că pentru $n \geqslant N(\varepsilon, \eta)$

$$P(|g(f_n) - g(A)| \geqslant \varepsilon) < \eta,$$

ceea ce demonstrează teorema enunțată.

3. Compararea tipurilor de convergență

Între cele patru moduri de convergență pentru șirurile de variabile aleatoare pe care le-am prezentat există relații de implicație. Teoremele care urmează precizează gradul de generalitate al celor patru tipuri de convergență.

Teoremă. *Convergența tare și convergența aproape sigură sînt moduri de convergență echivalente.*

Prin urmare, orice șir convergent aproape sigur converge tare, și reciproc. Să presupunem șirul $(f_n)_n$ tare convergent către f, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ și $\sigma > 0$ există numărul natural $N(\varepsilon, \sigma)$; astfel încît

$$P\{\bigcup_{n \geqslant N(\varepsilon, \sigma)} (|f_n - f| \geqslant \sigma)\} < \varepsilon.$$

Să notăm $A = \{\omega;\ f_n(\omega) \not\to f(\omega)\}$, mulțimea punctelor $\omega \in \Omega$ în care șirul $(f_n)_n$ nu converge către f. Fie $\omega_0 \in A$, atunci cum $f_n(\omega_0) \not\to f(\omega_0)$, înseamnă că există σ_0 rațional, astfel încît pentru orice N natural există $n > N$ cu proprietatea

$$|f_n(\omega_0) - f(\omega_0)| \geqslant \sigma_0.$$

Să alegem pe N așa fel încît $N = N\left(\frac{\varepsilon}{2^n}, \sigma_0\right)$, atunci

$$\omega_0 \in \bigcup_{n \geqslant N\left(\frac{\varepsilon}{2n}, \sigma_0\right)} (|f_n(\omega) - f(\omega)| \geqslant \sigma),$$

rezultă că

$$A \subseteq \bigcup_{\sigma_0 \in Q} \left(\bigcup_{n \geqslant N\left(\frac{\varepsilon}{2^n}, \sigma_0\right)} |f_n - f| \geqslant \sigma_0 \right).$$

Din această incluziune deducem că mulțimea A este submulțime a unei mulțimi de probabilitate mai mică ca ε, deci $P(A) = 0$.

Să presupunem acum că șirul $(f_n)_n$ converge aproape sigur către f și să notăm cu A mulțimea punctelor în care șirul (f_n) nu converge către f, atunci $P(A) = 0$.

Pentru mulțimea $\Omega - A$, avem $P(\Omega - A) = 1$ și în toate punctele mulțimii $\Omega - A$ șirul $(f_n)_n$ converge către f. Pentru orice $\sigma > 0$ și $\omega \in \Omega - A$, există $N(\sigma)$, astfel încît pentru orice $n \geqslant N(\sigma)$

$$\omega \in \bigcap_{n \geqslant N(\sigma)} (|f_n - f| < \sigma),$$

deci

$$\Omega - A \subseteq \bigcap_{n \geqslant N(\sigma)} (|f_n - f| < \sigma).$$

Scanned with OKEN Scanner

Să notăm cu $B_N = \bigcap_{n \geq N} (|f_n - f| < \sigma)$; șirul de evenimente B_N, $N = 1, 2, \ldots$, este ascendent și

$$\lim_{N \to \infty} P(B_N) = 1$$

oricare ar fi $\sigma > 0$. Prin urmare, pentru $\varepsilon > 0$ și $\sigma > 0$ există $N(\varepsilon, \sigma)$, astfel încît

$$P\Big(\bigcap_{n > N(\varepsilon, \sigma)} |f_n - f| < \sigma\Big) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Din această teoremă rezultă imediat că dacă $(f_n)_n$ converge aproape sigur către f, atunci $(f_n)_n$ converge și în probabilitate.

Într-adevăr, probabilitatea fiind funcție de mulțimi crescătoare, din incluziunea

$$(|f_n - f| \geqslant \sigma) \subseteq \bigcup_{n \geqslant N(\varepsilon, \sigma)} (|f_n - f| \geqslant \sigma)$$

rezultă că dacă $(f_n)_n$ converge tare către f, atunci pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon, \sigma)$

$$P(|f_n - f| \geqslant \sigma) \leqslant P\Big(\bigcup_{n \geqslant N(\varepsilon, \sigma)} |f_n - f| \geqslant \sigma\Big) < \varepsilon,$$

deci $(f_n)_n$ converge și în probabilitate către f. Se știe din teoria funcțiilor reale că există șiruri convergente în măsură, deci în probabilitate, care nu converg aproape peste tot. După teorema lui Riesz pentru șiruri de funcții măsurabile convergente în măsură rezultă că din orice șir $(f_n)_n$ convergent în probabilitate către f se poate extrage un subșir $(f_{n_k})_k$ convergent aproape sigur către f.

Teoremă. *Dacă șirul de variabile aleatoare $(f_n)_n$ converge în probabilitate către f, atunci șirul $(f_n)_n$ converge în reparație către f.*

Fie F_n funcția de repartiție a variabilei f_n, F funcția de repartiție a variabilei f și a un punct de continuitate al funcției F. Pentru $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încît

$$F(a + \delta) - F(a - \delta) < \varepsilon.$$

Avem

$$F(a - \delta) = P\{(f < a - \delta)\} \leqslant P(f_n < a) + P((f_n \geqslant a) \cap (f < a - \delta)) \leqslant$$
$$\leqslant F_n(a) + P((f_n \geqslant a) \cap (f < a - \delta)) \leqslant F_n(a) + P(|f_n - f| \geqslant \delta)).$$

Din inegalitatea $F(a - \delta) \leqslant F_n(a) + P(|f_n - f| \geqslant \delta)$ rezultă

$$F(a - \delta) \leqslant \varliminf_{n \to \infty} F_n(a). \qquad (*)$$

În inegalitatea de mai sus să schimbăm locul funcțiilor F și F_n, atunci obținem inegalitatea

$$F_n(a) \leqslant F(a + \delta) + P(|f_n - f| \geqslant \delta),$$

din care rezultă că

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} F_n(a) \leqslant F(a+\delta). \qquad (**)$$

Din cele două inegalități (*), (**) rezultă

$$0 \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} F_n(a) - \underline{\lim_{n\to\infty}} F_n(a) \leqslant F(a+\delta) - F(a-\delta) < \varepsilon.$$

În punctul a șirul $(F_n)_n$ este convergent; să notăm

$$\lim_{n\to\infty} F_n(a) = G(a),$$

atunci $G(a) \geqslant F(a-\delta)$ și $G(a) \leqslant F(a+\delta)$, rezultă că

$$-\frac{\varepsilon}{2} < F(a-\delta) - F(a) \leqslant G(a) - F(a) \leqslant F(a+\delta) - F(a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Punctul a fiind punct de continuitate pentru f, rezultă că $F(a) = G(a)$ și atunci

$$\lim_{n\to\infty} F_n(a) = F(a).$$

Reciproca acestei teoreme nu este adevărată, există șiruri convergente în sens Bernoulli și care nu sînt convergente în probabilitate. Pentru a ilustra să considerăm exemplul: pe cîmpul de probabilități $\{[0,1], \mathfrak{B}, P\}$ P fiind măsura Lebesgue să considerăm funcțiile

$$f_n(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad 0 \leqslant \omega \leqslant \frac{1}{2} \\ 1 & \text{dacă} \quad \frac{1}{2} < \omega \leqslant 1 \end{cases}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

și funcția

$$f(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad 0 \leqslant \omega \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 & \text{dacă} \quad \frac{1}{2} < \omega \leqslant 1. \end{cases}$$

Funcțiile de repartiție corespunzătoare acestor variabile aleatoare sînt

$$F_n(a) = F(a) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad a \leqslant 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dacă} \quad 0 < a \leqslant 1 \\ 1 & \text{dacă} \quad 1 < a \end{cases}$$

și se vede că

$$\lim_{n\to\infty} F_n(a) = F(a),$$

în timp ce $P(|f_n - f| = 1) = 1$.

Teoremă. *Dacă şirul de variabile aleatoare* $(f_n)_n$ *converge în sensul Bernoulli către o variabilă aleatoare constantă* c, *atunci şirul* $(f_n)_n$ *converge în probabilitate către* c.

Să notăm cu $F_n(a) = P(f_n < a)$ şi $F(a) = P(f < a)$. Funcţia de repartiţie a variabilei constante $f = c$ este

$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad a \leqslant c \\ 1 & \text{dacă} \quad c > a \end{cases}$$

şi se vede că F are un singur punct de discontinuitate, $a = c$. Atunci

$$0 \leqslant 1 - P(|f_n - c| < \sigma) = 1 - P(c - \sigma \leqslant f_n < c + \sigma) =$$
$$= 1 - [P(f_n < c + \sigma) - P(f_n \leqslant c - \sigma)] =$$
$$= F(c + \varepsilon) - F(c - \varepsilon) - [F_n(c + \sigma) - F_n(c - \sigma)],$$

de unde rezultă că

$$\lim_{n \to \infty} P(|f_n - c| < \sigma) = 1,$$

ceea ce demonstrează teorema.

§ 5. Valori medii, dispersii, momente

1. Valori medii

Fie (Ω, K, P) un cîmp de probabilitate şi f o variabilă aleatoare sumabilă în raport cu măsura P, valoarea medie a variabilei f se defineşte prin

$$M(f) = \int_\Omega f(\omega)\, dP.$$

Dacă variabila aleatoare f este simplă, atunci valoarea ei medie este

$$M(f) = \sum_{i \in I} a_i P(f = a_i).$$

Să considerăm pe dreapta R tribul $\mathfrak{B}$ al mulţimilor boreliene, dacă $f : \Omega \to R$ este variabilă aleatoare, atunci pentru orice $B \in \mathfrak{B}$, mulţimea $f^{-1}(B) \in \mathfrak{B}$. Pe tribul $\mathfrak{B}$ să luăm funcţia de mulţime $\mu^{(f)}$ definită prin relaţia

$$\mu^{(f)}(B) = P(f^{-1}(B)).$$

Funcţia de mulţime $\mu^{(f)}$ este măsură pe $\mathfrak{B}$ şi numim această măsură indusă de variabila aleatoare f. Dacă luăm $B = [a, b)$, atunci

$$\mu^{(f)}([a, b)) = P(f^{-1}([a, b))) = F(b) - F(a)$$

unde F este funcţia de repartiţie a variabilei f.

Teoremă. *Dacă f este variabilă aleatoare P — sumabilă, atunci*

$$\int_\Omega f\,dP = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF.$$

Integrala din membrul al doilea este integrală Lebesgue-Stieltjes. Vom presupune mai întîi că $f \geqslant 0$. Notăm prin $[f]_N$ funcția

$$[f]_N(\omega) = \begin{cases} f(\omega) & \text{dacă} \quad f(\omega) \leqslant N \\ 0 & \text{dacă} \quad f(\omega) < N, \end{cases}$$

atunci

$$\lim_{N\to\infty} \int_\Omega [f]_N\,dP = \int_\Omega f\,dP.$$

Integrala $\int_\Omega [f]_N\,dP$ se poate scrie încă

$$\int_{E_N} f\,dP,$$

unde $E_N = \{\omega;\ 0 \leqslant f(\omega) \leqslant N\}$. Cum pe mulțimea E_N variabila aleatoare f are restricția mărginită, atunci pentru o diviziune $\Delta : x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_m = N$, a segmentului $[0, N]$, avem

$$\int_{E_N} f\,dP = \lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{k=1}^{m} x_k P(f^{-1}[x_{k-1}, x_k)) =$$

$$= \lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{k=1}^{m-1} x_{k-1} P(f^{-1}[x_{k-1}, x_k)).$$

Dacă ξ_k este un punct arbitrar al intervalului $[x_{k-1}, x_k)$, se vede că

$$\int_{E_N} f\,dP = \lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{k=1}^{m} \xi_k P(f^{-1}[x_{k-1}, x_k)).$$

Să considerăm acum pe tribul borelian $\mathfrak{B}$, măsura $\mu^{(f)}$ și funcția definită pe $[0, N]$ cu valori reale $I : x \to x$. Egalitatea de mai sus se poate scrie sub forma

$$\int_{E_N} f\,dP = \lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{k=1}^{m} \xi_k [F(x_k) - F(x_{k-1})].$$

Din această relație rezultă că integrala Lebesgue-Stieltjes a funcției: $I : [0, N] \to R(x \to x)$ în raport cu funcția F există și că avem egalitatea:

$$\int_{E_N} f\,dP = \int_0^N x\,dF(x).$$

Cum însă $\int_\Omega f\,dP = \lim_{N\to\infty} \int_{E_N} f\,dP$, rezultă că integrala $\int_0^\infty x\,dF(x)$ este

convergentă și că

$$\int_\Omega f\,dP = \int_0^\infty x\,dF(x).$$

Dacă variabila f nu este pozitivă, atunci o descompunere în partea pozitivă f^+ și partea negativă f^-, $f = f^+ - f^-$ și egalitatea

$$\int_\Omega f\,dP = \int_{-\infty}^\infty x\,dF(x)$$

se obține fără dificultate.

Să presupunem, că pentru variabila aleatoare $f: \Omega \to R$, integrala Lebesgue-Stieltjes

$$\int_{-\infty}^\infty x\,dF(x)$$

este convergentă. Există atunci un șir de segmente.

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots \subseteq K_n \subseteq \ldots$$

astfel încît

$$\bigcup_{k=1}^\infty K_n = R$$

și

$$\lim_{n\to\infty} \int_{K_n} x\,dF(x) = \int_{-\infty}^\infty x\,dF(x).$$

Să presupunem că $K_n = [a_n, b_n]$, atunci pentru variabila aleatoare $f: \Omega \to R$ avem relațiile:

$$f^{-1}(K_n) \in K, \quad f^{-1}(K_n) \subseteq f^{-1}(K_{n+1}), \tag{1}$$

oricare ar fi n;

$$\bigcup_{n=1}^\infty f^{-1}(K_n) = \Omega; \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(f^{-1}(K_n)) = P(\Omega) = 1. \tag{3}$$

Pentru $\int_{K_n} x\,dF(x) = \int_{a_n}^{b_n} x\,dF(x)$ avem relațiile:

$$\int_{a_n}^{b_n} x\,dF(x) = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^m \xi_k [F(x_k) - F(x_{k-1})]$$

unde

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k) \text{ și } \Delta: x_0 = a_n < x_1 < \ldots < x_m = b_n$$

Scanned with OKEN Scanner

este o diviziune a segmentului $[a_n, b_n]$. Cum pe mulțimea $f^{-1}(K_n)$ variabila aleatoare f are restricția mărginită, membrul al doilea se poate scrie

$$\lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{h=1}^{m} \xi_h P(x_{h-1} \leqslant f < x_h)$$

și reprezintă $\int_{f^{-1}(K_n)} f\, dP$. Putem scrie egalitatea

$$\int_{K_n} x\, dF(x) = \int_{f^{-1}(K_n)} f\, dP.$$

Integrala Lebesgue, fiind funcție de mulțime complet aditivă, și $\int_\Omega f\, dP$ existînd, avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{K_n} x\, dF(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{f^1(K_n)} f\, dP = \int_\Omega f\, dP.$$

Dacă f este o variabilă aleatoare cu densitatea de repartiție $\rho(x)$ și dacă

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, \rho(x)\, dx$$

există, atunci există și $M(f)$ și avem

$$M(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\, dx.$$

Deoarece în practică se lucrează mai des cu variabile aleatoare simple și de tip continuu, demonstrațiile teoremelor care urmează le vom da pentru aceste cazuri.

Aplicație. Fie f o variabilă care urmează o lege uniformă în intervalul $[a, b]$. Să calculăm valoarea ei medie. Densitatea de repartiție a variabilei f este dată de

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < a \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{dacă } a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{dacă } x > b \end{cases}$$

și deci

$$M(f) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx = \frac{a+b}{2},$$

cu alte cuvinte valoarea medie a variabilei aleatoare f este mijlocul intervalului $[a, b]$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Proprietăți ale valorii medii

Teoremă. *Fie f o variabilă aleatoare și a și b două numere reale. Avem*

$$M(af + b) = aM(f) + b.$$

Demonstrația rezultă imediat din definiția valorii medii.

Teoremă. *Valoarea medie a sumei a două variabile aleatoare f și g este egală cu suma valorilor medii, adică*

$$M(f + g) = M(f) + M(g).$$

Demonstrație. a) Să presupunem că variabilele aleatoare f și g sînt discrete. Fie atunci $(a_\alpha)_{1\leqslant\alpha<\infty}$ valorile luate de f și $(b_\beta)_{1\leqslant\beta<\infty}$ valorile luate de g. Atunci variabila $f + g$ este o variabilă aleatoare și ia valorile $(a_\alpha + b_\beta)_{1\leqslant\alpha,\beta<\infty}$. Evident că valoarea $(a_\alpha + b_\beta)$ este luată pe mulțimea

$$\{f = a_\alpha\} \cap \{g = b_\beta\}$$

care nu este vidă. Din definiția valorii medii rezultă

$$M(f + g) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} (a_\alpha + b_\beta) P(\{f = a_\alpha\} \cap \{g = b_\beta\}) =$$

$$= \sum_\alpha \sum_\beta a_\alpha P(\{f = a_\alpha\} \cap \{g = b_\beta\}) + \sum_\alpha \sum_\beta b_\beta P(\{f = a_\alpha\} \cap \{g = b_\beta\}) =$$

$$= \sum_\alpha a_\alpha \sum_\beta P(\{f = a_\alpha\} \cap \{g = b_\beta\}) + \sum_\beta b_\beta \sum_\alpha P(\{f = a_\alpha\} \cap \{g = b_\beta\}).$$

Ținînd seama de proprietatea de aditivitate a probabilității

$$P\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \sum_{\alpha\in I} P(A_\alpha),$$

avem

$$M(f + g) = \sum_\alpha a_\alpha P\left(\{f = a_\alpha\} \cap \bigcup_\beta \{g = b_\beta\}\right) +$$
$$+ \sum_\beta b_\beta P\left(\bigcup_\alpha \{f = a_\alpha\} \cap \{g = b_\beta\}\right).$$

Cum însă

$$\bigcup_\beta \{g = b_\beta\} = \Omega \text{ și } \bigcup_\alpha \{f = a_\alpha\} = \Omega,$$

obținem

$$M(f + g) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha P(\{f = a_\alpha\}) + \sum_{\beta=1}^{\infty} b_\beta P(\{g = b_\beta\})$$

sau

$$M(f + g) = M(f) + M(g).$$

b) Dacă variabilele f și g sînt continue, $f+g$ are funcția de repartiție $F_{f+g}(x)$ și $\rho(x, y)$ este densitatea de repartiție corespunzătoare, atunci

$$M(f+g) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{f+g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} \rho(z, x-z)\, dx \right) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(z, x-z)\, dx dz.$$

Făcînd schimbarea de variabilă $y = x - z$, obținem

$$M(f+g) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (z+y)\rho(z, y)\, dz\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z\,\rho(z, y)\, dz\, dy +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y\rho(z, y)\, dz\, dy.$$

Însă

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(z, y)\, dy = \rho_f(z) \text{ și } \int_{-\infty}^{\infty} \rho(z, y)\, dz = \rho_g(y),$$

și deci

$$M(f+g) = \int_{-\infty}^{\infty} z\rho_f(z)\, dz + \int_{-\infty}^{\infty} y\rho_g(y)\, dy$$

sau

$$M(f+g) = M(f) + M(g).$$

Observație. Teorema de mai sus se generalizează cu ușurință (prin inducție, de exemplu) și obținem

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M(f_i).$$

Teoremă. *Dacă f și g sînt două variabile aleatoare independente, astfel ca $f \cdot g$ să fie P-sumabilă, atunci*

$$M(f \cdot g) = M(f) \cdot M(g).$$

Demonstrație. a) Dacă f și g sînt variabile discrete și f ia valorile $(a_\alpha)_{1 \leqslant \alpha < \infty}$ iar g valorile $(b_\beta)_{1 \leqslant \beta < \infty}$, atunci

$$M(fg) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} a_\alpha b_\beta P(\{f = a_\alpha\} \cap \{g = b_\beta\}).$$

Din independența variabilelor f și g rezultă că

$$P(\{f = a_\alpha\} \cap \{g = b_\beta\}) = P(\{f = a_\beta\}) \cdot P(\{g = b_\beta\}),$$

și deci

$$M(fg) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha P(\{f = a_\alpha\}) \sum_{\beta=1}^{\infty} b_\beta P(\{g = b_\beta\}).$$

Scanned with OKEN Scanner

adică

$$M(fg) = M(f) \cdot M(g).$$

b) Dacă f și g sînt continue și vectorul aleator (f, g) are densitatea $\rho(x, y)$, din independența variabilelor f și g rezultă că

$$\rho(x, y) = \rho_1(x)\, \rho_2(y),$$

unde $\rho_1(x)$ și $\rho_2(y)$ sînt densitățile variabilelor f, respectiv g. Atunci

$$M(fg) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy\rho(x, y)\, dx\, dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x\rho_1(x)\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} y\rho(y)\, dy\right)$$

sau

$$M(fg) = M(f) \cdot M(g).$$

O b s e r v a ț i e. Teorema de mai sus se generalizează imediat. Dacă $\{f_i\}_{1 \leqslant i < \infty}$ sînt independente, atunci

$$M\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right) = \prod_{i=1}^{n} M(f_i).$$

Teoremă. *Dacă* $\{f_i\}_{1 \leqslant i < \infty}$ *este un șir de variabile aleatoare independente două cîte două, atunci*

$$M((f_1 + f_2 + \ldots + f_n)^2) = \sum_{i=1}^{n} M_2(f_i) + 2\sum_{i \neq j}^{n} M(f_i)\, M(f_j).$$

Demonstrație. Din definiția valorii medii rezultă că

$$M((f_1 + f_2 + \ldots + f_n)^2) = M\left(\sum_{i=1}^{n} f_i^2 + 2\sum_{i \neq j}^{n} f_i f_j\right) =$$

$$= M\left(\sum_{i=1}^{n} f_i^2\right) + 2M\left(\sum_{i \neq j} f_i f_j\right).$$

Variabilele aleatoare fiind independente două cîte două, avem

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} f_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} M(f_i^2),$$

$$M\left(\sum_{i \neq j} f_i f_j\right) = \sum_{i \neq j} M(f_i)\, M(f_j)$$

și deci

$$M((f_1 + f_2 + \ldots + f_n)^2) = \sum_{i=1}^{n} M(f_i^2) + 2\sum_{i \neq j} M(f_i)\, M(f_j).$$

Să stabilim acum cîteva proprietăți ale valorii medii utilizînd integrala Stieltjes.

Teoremă. *Fie f o variabilă aleatoare, cu funcţia de repartiţie $F(x)$. Dacă $M(f)$ există, atunci*

$$\lim_{x\to-\infty} x(1-F(x)) = 0 \qquad (\alpha)$$

$$\lim_{x\to\infty} xF(x) = 0. \qquad (\beta)$$

Demonstraţie. Dacă $M(f)$ există, atunci există şi $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\,dF(x)$ şi deci dacă $x > 0$ atunci

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{\infty} |u|\,dF(u) = 0 \text{ şi } \lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^{x} |u|\,dF(u) = 0.$$

De unde rezultă, pentru $x>0$ că

$$x(1-F(x)) = x\int_x^{\infty} dF(u) \leqslant \int_x^{\infty} u\,dF(u)$$

şi analog, dacă $x < 0$, avem

$$|x|\,F(x) = |x|\int_x^{\infty} dF(u) < \int_{-\infty}^{x} |u|\,dF(u).$$

Ţinînd seama de relaţia (1) se obţin imediat egalităţile (α) şi (β).

Teoremă. *Dacă $F(x)$ este funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare f, $M(f)$ valoarea medie corespunzătoare, atunci avem*

$$M(f) = \int_0^{\infty} (1-F(u))\,du - \int_{-\infty}^{0} f(u)\,du.$$

Demonstraţie. Să considerăm integrala

$$\int_0^x u\,dF(u);$$

integrînd prin părţi obţinem:

$$\int_0^x u\,dF(u) = uF(u)\Big|_0^x - \int_0^x F(u)\,du = xF(x) - \int_0^x F(u)\,du.$$

Dacă scădem şi adunăm pe x obţinem:

$$\int_0^x u\,dF(u) = -x(1-F(x)) + \int_0^x (1-F(u))\,du$$

analog

$$\int_{-x}^{0} u\,dF(u) = xF(-x) - \int_{-x}^{0} F(u)\,du.$$

Ţinînd seama de egalităţile (α) şi (β) de mai sus rezultă că

$$\int_0^{\infty} u\,dF(u) = \int_0^{\infty} (1-F(u))\,du$$

și

$$\int_{-\infty}^{0} u dF(u) = -\int_{-\infty}^{0} F(u)\,du,$$

de unde rezultă imediat că

$$M(f) = \int_{0}^{\infty} (1 - F(u))\,du - \int_{-\infty}^{0} F(u)\,du.$$

Teoremă. *Fie $y = H(x)$ o funcție continuă monoton crescătoare și f o variabilă aleatoare a cărei funcție de repartiție este $F(x)$. Dacă există valoarea medie a variabilei $\eta = H(f)$ atunci*

$$M(H(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\,dF(x).$$

Demonstrație. Să notăm cu $y = H^{-1}(x)$ inversa funcției $x = H(y)$. Atunci $P(H(f) < x) = F(H^{-1}(x))$ (deoarece $H(f) < x$ se poate scrie $f < H^{-1}(x)$) și deci

$$M(H(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(H^{-1}(x)).$$

Notînd $y = H^{-1}(x)$, obținem

$$M(H(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} H(y)\,dF(y).$$

Observația 1. Fie $H(x) = H_1(x) - H_2(x)$, unde $H_1(x)$ și $H_2(x)$ sînt funcții continue și monoton crescătoare. Dacă $M(H_1(f))$ și $M(H_2(f))$ există, avem:

$$M(H_1(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} H_1(y)\,dF(y)$$

și

$$M(H_2(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} H_2(y)\,dF(y).$$

Deoarece

$$M(H(f)) = M(H_1(f)) - M(H_2(f)),$$

rezultă că

$$M(H(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} H_1(y)\,dF(y) - \int_{-\infty}^{\infty} H_2(y)\,dF(y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (H_1(y) - H_2(y))\,dF(y).$$

Observația 2. Dacă f este o variabilă aleatoare oarecare și $t \in R$, atunci $M(e^{ift})$ este dată de:

$$M(e^{ift}) = M(\cos ft) + iM(\sin ft)$$

sau

$$M(e^{ift}) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos ft \, dF(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin ft \, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ift} \, dF(x).$$

Valoarea medie $M(e^{ift}) = \varphi_f(t)$ o vom numi funcție caracteristică a variabilei f.

3. Valori medii condiționate

Fie în K evenimentul sigur Ω; am definit valoarea medie a variabilei aleatoare sumabile f, integrala

$$M_f = \int_{\Omega} f(\omega) P(d\omega).$$

Pentru evenimentul $B \in K$, fix, să considerăm cîmpul de probabilități $(B, B \cap K, P_B)$, unde P_B este probabilitatea condiționată de evenimentul B

$$P_B(X) = \frac{P(X \cap B)}{P(B)}.$$

Prin definiție, valoarea medie condiționată a variabilei f este

$$M(f \mid B) = \int_{\Omega} f(\omega) P(d\omega \mid B).$$

Teoremă. *Valoarea medie condiționată a variabilei f de evenimentul B este egală cu*

$$M(f \mid B) = \frac{1}{P(B)} \int_B f(\omega) P(d\omega).$$

Într-adevăr, să presupunem variabila aleatoare f, variabilă simplă care ia valorile a_i pe evenimentele A_i. Atunci

$$M(f \mid B) = \sum_{i=1}^{n} a_i P_B(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{1}{P(B)} \int_B f(\omega) P(d\omega).$$

Cum orice variabilă aleatoare sumabilă este limită în probabilitate a unui șir Cauchy de variabile aleatoare simple, rezultă că teorema este adevărată pentru orice variabilă aleatoare sumabilă.

Dacă evenimentul B se reprezintă ca reuniune numărabilă de evenimente B_k, $k = 1, 2, \ldots$ disjuncte

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k,$$

atunci

$$M(f \mid B) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} P(B_k)\, M(f \mid B_k)}{\sum_{k=1}^{\infty} P(B_k)}.$$

Într-adevăr, din egalitatea

$$\int_B f(\omega)\, P(d\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k} f(\omega)\, P(d\omega)$$

rezultă

$$P(B) \cdot M(f \mid B) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k)\, M(f \mid B_k).$$

De aici se obține imediat relația de mai sus.

Teoremă. *Fie f o variabilă aleatoare și $M(f)$ valoarea medie corespunzătoare. Atunci*

$$M(f) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)\, M(f \mid A_n),$$

unde

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n \cap A_m = \Phi, \quad n \neq m.$$

Într-adevăr, dacă în formula

$$M(f \mid B) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} P(B_k)\, M(f \mid B_k)}{P(B)},$$

unde $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, $B_k \cap B_h = \Phi$, luăm pentru B evenimentul sigur Ω și drept B_k evenimentele A_k, obținem

$$M(f \mid \Omega) = M(f) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)\, M(f \mid A_k)}{P(\Omega)}.$$

Cum $P(\Omega) = 1$ se obține formula de compunere a valorilor medii condiționate.

4. Dispersia unei variabile aleatoare

Fie f o variabilă aleatoare. Numim dispersia variabilei f cu pătratul sumabil și o notăm cu $D^2(f)$,

$$D^2(f) = M((f - M(f))^2).$$

Adesea dispersia variabilei aleatoare f se notează $\sigma^2(f)$, atunci $\sigma(f) = \sqrt{D^2(f)}$. Se observă imediat că

$$D^2(f) = M(f^2) - (M(f))^2.$$

Dacă f este o variabilă aleatoare discretă care ia valorile $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ cu probabilitățile respective $p_1, \ldots, p_n, \ldots$, atunci rezultă că:

$$D^2(f) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n (x_n - M(f))^2$$

sau

$$D^2(f) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n x_n^2 - \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n X_n\right)^2.$$

Dacă f este o variabilă aleatoare, cu funcția de repartiție $F(x)$, atunci

$$D^2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(f))^2 \, dF(x)$$

sau

$$D^2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, dF(x) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x)\right)^2.$$

Aplicație. Să calculăm dispersia unei variabile aleatoare care urmează o lege uniformă în intervalul $[a, b]$. Știm că densitatea de repartiție este $f(x) = \frac{1}{b-a}$ dacă $a \leqslant x \leqslant b$ și $f(x) = 0$ dacă $x < a$ sau $x > b$. Ținînd seama că $M(f) = \frac{a+b}{2}$, rezultă că

$$D^2(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 \, dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Deci

$$\sigma(f) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Dispersie condiționată. Fie f o variabilă aleatoare și $F_A(x)$ funcția de repartiție condiționată corespunzătoare variabilei f. Atunci, prin definiție, dispersia variabilei lui f condiționată de evenimentul A este

$$D_A^2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, dF_A(x) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \, dF_A(x)\right)^2.$$

Din definiție rezultă imediat

$$D_A^2(f) = M(f^2 | A) - [M(f | A)]^2.$$

Dacă A_i, $i = 1, 2, \ldots$ este o desfacere a evenimentului Ω, am văzut că

$$M(f) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \, M(f/A_n).$$

Înlocuind pe f cu f^2 obținem

$$M(f^2) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)\, M(f^2 | A_n)$$

și deci putem scrie că

$$D^2(f) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)\, M(f^2 | A_n) - (M(f))^2.$$

Luînd în considerare faptul că

$$M(f^2 | A_n) = D^2_{A_n}(f) + [M(f | A_n)]^2,$$

obținem

$$D^2(f) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)\, D^2_{A_n}(f) + \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)\, [M(f | A_n)]^2 - (M(f))^2$$

$$D^2(f) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)\, D^2_{A_n}(f) + \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \{(M(f | A_n))^2 - (M(f))^2\}.$$

Dacă notăm $\sigma_{A_n}(f) = \sqrt{D^2_{A_n}(f)}$, atunci această relație se scrie:

$$\sigma^2(f) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)\, \sigma^2_{A_n}(f) + \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \{(M(f) | A_n))^2 - (M(f))^2\}.$$

5. Momente

Momentul de ordinul $r\,(r > 1)$ al unei variabile aleatoare r-sumabilă îl definim prin:

$$Mr(f) = \int_{\Omega} f^r(\omega)\, P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r\, dF(x),$$

iar momentul absolut de ordinul r, prin

$$Mr(|f|) = \int_{\Omega} |f(\omega)|^r\, P(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r\, dF(x).$$

Variabila aleatoare f fiind r-sumabilă, înseamnă că variabila aleatoare f^r este sumabilă, atunci integralele Lebesgue-Stieltjes de mai sus sînt egale și existența unora implică existența celorlalte.

Teoremele care urmează vor pune în evidență diferite relații între momente.

Teoremă. *Dacă* $M(|f|^r)$ *și* $M(|g|^r)$ *există, atunci:*

a) $$M(|f + g|^r) \leqslant c_r M(|f|^r) + c_r M(|g|^r),$$

unde $c_r = 1$ *sau* 2^{r-1}, *după cum* $r \leqslant 1$ sau $r > 1$;

b) $$M(|fg|) \leqslant (M(|f|^r))^{\frac{1}{r}} (M(|g|^s)^{\frac{1}{s}}$$

unde $r > 1$ *și* $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. *Această inegalitate se mai numește și inegalitatea lui Hölder;*

c) *dacă* $r > 1$, *atunci*

$$[M(|f + f'|^r)]^{\frac{1}{r}} \leqslant [M(|f|^r)]^{\frac{1}{r}} + [M(|f'|^r)]^{\frac{1}{r}},$$

care se numește inegalitatea lui Mincowski;

d) $$M(|fg|) \leqslant \sqrt{M(|f|^2)\, M(|g|^2)}$$

care este cunoscută sub numele de inegalitatea lui Schwarz.

Demonstrație. a) Să considerăm inegalitatea elementară

$$|a + b|^r \leqslant c_r |a|^r + c_r |b|^r,$$

unde $r > 0$ și $c_r = 1$ sau 2^{r-1}, după cum $r \leqslant 1$ sau $r > 1$.

Înlocuind pe a cu f și pe b cu g și luînd valoarea medie obținem:

$$M(|f + g|^r) \leqslant c_r M(|f|^r) + c_r M(|g|^r).$$

Această inegalitate ne arată că dacă $M(|f|^r)$ și $M(|g|^r)$ există, atunci există și $M(|f + g|^r)$.

b) Să considerăm inegalitatea cunoscută

$$|ab| < \frac{|a|^r}{r} + \frac{|b|^s}{s}$$

cu $r > 1$ și $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ și să înlocuim pe a cu $\frac{f}{[M(|f|^r)]^{\frac{1}{r}}}$ și pe b cu $\frac{g}{[M(|g|^s)]^{\frac{1}{s}}}$. Atunci avem inegalitatea

$$\frac{|fg|}{[M(|f|^r)]^{\frac{1}{r}} [M(|g|^s)]^{\frac{1}{s}}} \leqslant \frac{|f|^r}{r(M(|f|^r))} + \frac{|g|^s}{s(M(|g|^s))},$$

de unde rezultă că variabila fg este sumabilă.

Luînd valoarea medie obținem

$$\frac{M(|fg|)}{[M(|f|^r)]^{\frac{1}{r}} [M(|g|^s)]^{\frac{1}{s}}} \leqslant \frac{M(|f|^r)}{r(M(|f|^r))} + \frac{M(|g|^s)}{s(M(|g|^s))} = 1,$$

de unde

$$M(|fg|) \leqslant [M(|f|^r)]^{\frac{1}{r}} \cdot [M(|g|^s)]^{\frac{1}{s}}.$$

c) Din egalitatea

$$|f + f'|^r = |f + f'| \cdot |f + f'|^{r-1}$$

rezultă aplicînd valoarea medie, că

$$M(|f + f'|^r) \leqslant M(|f| \cdot |f + f'|^{r-1}) + M(|f'| \cdot |f + f'|^{r-1}).$$

Aplicînd acum inegalitatea lui Hölder pentru fiecare termen al membrului doi din inegalitatea de mai sus, obținem

$$M(|f+f'|^r) \leqslant [(M(|f|^r)^{1/r} + (M(|f'|^r))^{1/r}](M(|f+f'|^{(r-1)s}))^{\frac{1}{s}}.$$

Împărțind fiecare membru cu

$$(M(|f + f'|))^{1/s}$$

și ținînd seama că

$$1 - \frac{1}{s} = \frac{1}{r} \text{ și } (r-1)s = r.$$

Obținem

$$[M(|f + f'|^r)]^{1/r} \leqslant [M(|f|)^r)]^{\frac{1}{h}} + [M(|f'|^r)]^{1/r}.$$

d) Dacă în inegalitatea lui Hölder luăm $r = s = 2$, obținem

$$(M(|f \cdot g|)) \leqslant \sqrt{M(|f|^2)\ M(|g|^2)}$$

și cu aceasta teorema este demonstrată.

Inegalitatea lui Kolmogorov. Fie f o variabilă aleatoare mărginită și

$$M = \sup_{\omega \in \Omega} f(\omega).$$

Atunci

$$P(|f| > a) \geqslant \frac{M_2(f) - a}{M^2}$$

pentru orice $a \geqslant 0$ și $M_2(f) = M(f^2)$.

Demonstrație. Avem

$$M(f^2) = \int_\Omega f^2 dP = \int_{\{\omega;\, |f| < a\}} f^2 dP + \int_{\{\omega;\, |f| \geqslant a\}} f^2\, dP \leqslant$$

$$\leqslant a^2 \cdot P(\{\omega:\, |f(\omega)| < a\}) + M^2 P(\{\omega:\, |f(\omega)| \geqslant a\}) \leqslant$$

$$\leqslant a^2 + M^2 P(|f| \geqslant a).$$

De aici rezultă inegalitatea

$$P(|f| \geqslant a) \geqslant \frac{M_2(f) - a^2}{M^2},$$

unde am pus $M_2(f) = M(f^2)$.

Inegalitatea lui Leapunov. Fie f o variabilă aleatoare, care are momente absolute de ordinul $s+1$. Dacă notăm

$$M(|f-a|^s) = m_s,$$

atunci

$$\sqrt[s]{m_s} < \sqrt[s+1]{m_{s+1}}.$$

Demonstrație. Se știe că o formă pătratică

$$Q(u, v) = Au^2 + 2Buv + Cv^2$$

este pozitiv definită dacă $A > 0$ și

$$AC - B^2 \geqslant 0.$$

Să considerăm acum expresia

$$Q(u, v) = M[\{|f-a|^{\frac{s-1}{2}} u + |f-a|^{\frac{s+1}{2}} v\}^2] =$$
$$= M[|f-a|^{s-1}]\, u^2 + 2[M|f-a|^s]\, uv + M[|f-a|^{s+1}]\, v^2.$$

Cum $Q(u, v)$ este o formă pozitiv definită, rezultă că

$$m_{s-1} \cdot m_{s+1} - m_s^2 \geqslant 0$$

sau

$$m_s^2 \leqslant m_{s-1} \cdot m_{s+1}.$$

Ridicînd la puterea s, inegalitatea se păstrează

$$m_s^{2s} \leqslant m_{s-1}^s \cdot m_{s+1}^s.$$

Să dăm acum lui s valorile $s = 1,2, \ldots s$. Avem

$$\begin{array}{lll}
m_1^2 \leqslant m_0^1 & & m_2^1 \\
m_2^4 \leqslant m_1^2 & & m_3^2 \\
m_3^6 \leqslant m_2^3 & & m_4^3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\
m_{s-2}^{2(s-2)} \leqslant m_{s-3}^{s-2} & & m_{s-1}^{s-2} \\
m_{s-1}^{2(s-1)} \leqslant m_{s-2}^{s-1} & & m_s^{s-1} \\
m_s^{2s} \leqslant m_{s-1}^s & & m_{s+1}^s.
\end{array}$$

Înmulțind inegalitățile de mai sus membru cu membru, obținem

$$m_1^2 m_2^4 m_3^6 \ldots\ldots m_{s-1}^{2(s-1)} \cdot m_s^{2s} \leqslant m_1^2 m_2^4 m_3^6 \ldots\ldots m_{s-1}^{2(s-1)} m_s^{s-1} m_{s+1}^s$$

sau

$$m_s^{s+1} \leqslant m_{s+1}^s.$$

Luînd radicalul de ordinul $s(s+1)$, avem

$$\sqrt[s]{m_s} \leqslant \sqrt[s+1]{m_{s+1}}$$

și cu aceasta inegalitatea lui Leapunov este demonstrată. Dacă luăm $a = 0$, inegalitățile încă se păstrează. Pentru variabilele aleatoare pozitive aceste inegalități sînt inegalități între valorile medii de ordinul s și $s+1$.

Vom da în continuare două dintre cele mai importante teoreme cunoscute sub denumirea de inegalitățile Cebîșev.

Teorema 1. *Fie $f(\omega)$ o variabilă aleatoare pentru care $M(f)$ și $D^2(f)$ există și fie $\lambda > 1$ un număr oarecare. Atunci*

$$P(\{\omega: |f(\omega) - M(f)| \geqslant \lambda D(f)\}) \leqslant \frac{1}{\lambda^2}.$$

Demonstrație. Să notăm, pentru simplificarea scrierii

$$M(f) = M \text{ și } D(f) = \sigma;$$

de asemenea să punem

$$A_\lambda = \{\omega: |f - M| \geqslant \lambda\sigma\}.$$

Atunci, din definiția dispersiei și a momentelor condiționate rezultă că

$$D^2(f) = M((f-M)^2) = M_{A_\lambda}((f-M)^2)\, P(A_\lambda) + M_{\mathbf{C}A_\lambda}((f-M)^2)\, P(\mathbf{C}A_\lambda),$$

unde $M_{A_\lambda}(g)$ și $M_{\mathbf{C}A_\lambda}(g)$ sînt momentele condiționate ale variabilei g.

De aici

$$D^2(f) \geqslant M_{A_\lambda}((f-M)^2)\, P(A_\lambda),$$

deoarece $M_{\mathbf{C}A_\lambda}((f-M)^2) \geqslant 0$, întrucît $(f-M)^2 \geqslant 0$.

Pe de altă parte, din definiția mulțimii A_λ rezultă că pe A_λ

$$(f-M)^2 \geqslant \lambda^2\sigma^2$$

și deci

$$M_{A_\lambda}((f-M)^2) \geqslant \lambda^2\sigma^2.$$

Atunci

$$D^2(f) \geqslant \lambda^2\sigma^2\, P(A_\lambda) = \lambda^2\sigma^2\, P(\{\omega: |f-M| \geqslant \lambda\sqrt{D(f)}\}),$$

de unde

$$P(\{\omega: |f(\omega) - M| \geqslant \lambda\sigma\}) \leqslant \frac{1}{\lambda^2}$$

și cu aceasta inegalitatea este stabilită. Această inegalitate se numește inegalitatea lui Cebîșev. Vom demonstra inegalitatea lui Cebîșev într-un caz mai general.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 2. *Fie f o variabilă aleatoare. Atunci*

$$P(\{\omega: |f(\omega)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{M_r(|f|)}{\varepsilon^r}$$

pentru orice număr real $r > 0$ și pentru orice ε pozitiv.

Am notat cu $M_r(|f|) = M(|f|^r)$.

Demonstrație. Să presupunem varabila f simplă și să notăm cu $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ mulțimea valorilor luate de variabila aleatoare f și cu

$$I_1 = \{\alpha \in I: |a_\alpha| \geqslant \varepsilon\}.$$

Să observăm că

$$\{\omega: |f(\omega)| \geqslant \varepsilon\} = \bigcup_{\alpha \in I_1} \{\omega: f(\omega) = a_\alpha\}.$$

Atunci, din definiția momentului absolut de ordin r, avem

$$M_r(|f|) = \sum_{\alpha \in I} |a_\alpha|^r P(\{\omega: f(\omega) = a_\alpha\}) \geqslant \sum_{\alpha \in I_1} |a_\alpha|^r P(\{\omega: f(\omega) = a_\alpha\}) \geqslant$$

$$\geqslant \varepsilon^r \sum_{\alpha \in I_1} P(\{\omega; f(\omega) = a_\alpha\}).$$

Din proprietatea de aditivitate a probabilității rezultă că

$$\sum_{\alpha \in I} P(\{\omega; f(\omega) = a_\alpha\}) = P\left(\bigcup_{\alpha \in I_1} \{\omega: f(\omega) = a_\alpha\}\right)$$

și deci

$$M_r(|f|) \geqslant \varepsilon^r P(\{\omega; |f(\omega)| \geqslant \varepsilon\}),$$

de unde rezultă inegalitatea cerută pentru variabile simple. Cum orice variabilă aleatoare sumabilă este limită de șiruri de variabilă aleatoare simple, rezultă teorema.

Să observăm că inegalitatea lui Cebîșev se poate scrie și sub forma

$$P(\{\omega: |f(\omega)| \leqslant \varepsilon\}) \geqslant 1 - \frac{M_r(|f|)}{\varepsilon^r},$$

deoarece

$$P(|f| \geqslant \varepsilon) + P(|f| < \varepsilon) = 1.$$

O b s e r v a ț i e. Teorema 1 rezultă din teorema 2, dacă în loc de f se ia abaterea $f - M(f)$ și în plus se consideră $r = 2$, cum se poate arăta cu ușurință.

6. Corelație, coeficient de corelație

Fie f_1 și f_2 două variabile aleatoare definite pe cîmpul de probabilitate $\{\Omega, K, P\}$. Să notăm $M_1(f_1) = m_1$ și $M_2(f_2) = m_2$.

Numim corelație a două variabile aleatoare f_1 și f_2 valoarea

$$\gamma = M_1((f_1 - m_1)(f_2 - m_2)) = \operatorname{cov}(f_1, f_2),$$

iar coeficient de corelație a celor două variabile aleatoare f_1 și f_2 raportul

$$r(f_1, f_2) = \frac{\gamma}{\sqrt{D^2(f_1) \cdot D^2(f_2)}}.$$

Din definiția coeficientului de corelație rezultă că

$$r(f_1, f_2) = r(f_2, f_1).$$

Să observăm că dacă f_1 și f_2 sînt variabile aleatoare discrete și

$$P(f_1 = a_m, f = b_n) = p_{mn}, \quad (m, n = 1, 2 \ldots.)$$

$$r(f_1, f_2) = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} (a_m - m_1)(b_n - m_2)}{\sqrt{D^2(f_1) \cdot D^2(f_2)}}$$

iar dacă f_1 și f_2 sînt continue, avînd densitatea de repartiție bidimensională $\rho(x, y)$, atunci

$$r(f_1, f_2) = \frac{1}{\sqrt{D^2(f_1)\, D^2(f_2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)(y - m_2)\, \rho(x,y)\, dxdy.$$

Ținînd seama că

$$M((f_1 - m_1)(f_2 - m_2)) = M(f_1 f_2 - m_1 f_2 - m_2 f_1 + m_1 m_2) = \\ = M(f_1 f_2) - M(f_1)\, M(f_2)$$

rezultă că, coeficientul de corelație poate fi scris sub forma următoare

$$r(f_1, f_2) = \frac{M(f_1 \cdot f_2) - M(f_1)\, M(f_2)}{\sqrt{D^2(f_1)\, D^2(f_2)}}.$$

Să stabilim cîteva proprietăți ale coeficientului de corelație.

Propoziție. *Dacă f_1 și f_2 sînt independente, atunci*

$$r(f_1, f_2) = 0.$$

Demonstrație. Dacă variabilele aleatoare sînt independente, atunci

$$M(f_1 \cdot f_2) = M(f_1)\, M(f_2).$$

și deci

$$r(f_1, f_2) = 0.$$

O b s e r v a ț i e. Reciproca propoziției de mai sus nu este adevărată. Acest fapt rezultă din următorul exemplu.

Fie variabilele aleatoare simple

$$f_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

și

$$f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Se vede că $M(f_1) = 0$, $M(f_2) = \frac{2}{3}$, deci $M(f_1)\,M(f_2) = 0$. Variabila aleatoare $f_1 \cdot f_2$ este

$$f_1 \cdot f_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

pentru care $M(f_1 \cdot f_2) = 0$, deci $r(f_1, f_2) = 0$, deși între cele variabile aleatoare există relația

$$f_2 = (f_1)^2.$$

Variabilele f_1 și f_2 sînt necorelate și dependente.

Propoziție. *Oricare ar fi cele două variabile* f_1 *și* f_2

$$r^2(f_1, f_2) \leqslant 1.$$

Demonstrație. Din definiția coeficientului de corelație și din inegalitatea lui Schwartz avem

$$M((f_1 - m_1)(f_2 - m_2)) \leqslant \sqrt{M((f_1 - m_1)^2)\,M((f_2 - m_2)^2)} =$$

$$= \sqrt{D^2(f_1) \cdot D^2(f_2)}$$

și deci

$$|r(f_1, f_2)| \leqslant 1.$$

În plus, să observăm că

$$r(f_1, f_1) = \frac{M((f_1 - m_1)^2)}{D(f_1)} = 1$$

și

$$r(f_1, -f_1) = \frac{M(-(f_1 - m_1)^2)}{D(f_1)} = -1.$$

Propoziție. *Dacă* $r(f_1, f_2)$ *este egal cu* 1 *sau cu* -1, *atunci între* f_1 *și* f_2 *există o relație liniară, adică* $f_2 = af_1 + b$, *cu* $a \neq 0$ *și* b *constante.*

Demonstrație. Să arătăm că dacă $f_2 = af_1 + b$, atunci

$$r(f_1, f_2) = \begin{cases} -1 \text{ pentru } a < 0 \\ 1 \text{ pentru } a > 0. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr,

$$m_2 = am_1 + b$$

și

$$r(f_1, f_2) = \frac{M(f_1 - m_1)(af_1 + b - am_1 - b)}{D^2(f_1)\, D^2(af_1 + b)} = \frac{M(a(f_1 - m_1)^2)}{|a|\, D^2(f_1)}.$$

De unde rezultă că

$$r(f_1, f_2) = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} -1 \text{ pentru } a < 0 \\ 0 \text{ pentru } a = 0 \\ 1 \text{ pentru } a > 0. \end{cases}$$

Reciproc, dacă $r(f_1, f_2) = \pm 1$, atunci $f_2 = af_1 + b$.
Să introducem următoarele variabile aleatoare

$$f_1' = \frac{f_1 - m_1}{D(f_1)}, \quad f_2' = \frac{f_2 - m_2}{D(f_2)}.$$

Avem

$$M(f_1' f_2') = r(f_1, f_2) = \pm 1$$

și

$$M(|f_1' \mp f_2'|^2) = \frac{M((f_1 - m_1)^2)}{D(f_1)} + \frac{M((f_2 - m_2)^2)}{D(f_2)} \mp 2\frac{M(f_1', f_2')}{D(f_1)\, D(f_2)}.$$

De unde obținem

$$M((f_1' \mp f_2')^2) = 2 \mp 2(\pm 1) = 0$$

și deci

$$f_1' \mp f_2' = 0$$

aproape peste tot pe Ω.

Ținînd seama de modul în care am definit cele două variabile,

$$f_2 = M(f_2) \pm D(f_2) \cdot \left(\frac{f_1 - m_1}{D(f_1)}\right),$$

ceea ce ne arată că $f_2 = b \pm af_1$.
Dreptele

$$\frac{f_1 - m_1}{D(f_1)} = \gamma \frac{f_2 - m_2}{D(f_2)}$$

$$\frac{f_2 - m_2}{D(f_2)} = \gamma \frac{f_1 - m_1}{D(f_1)}$$

se numesc drepte de regresiune și trec prin punctul (m_1, m_2).

Scanned with OKEN Scanner

§ 6. Serii de variabile aleatoare independente

Fiind dat şirul de variabile independente $(f_n)_n$ în sensul Steinhaus-Kaç, vom da cîteva rezultate relative la seriile de forma $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Propoziţie. (A. N. Kolmogorov). *Dacă* $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in SK$

$$M(f_i) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad D^2(f_i) < \infty, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \text{ şi dacă}$$

$$f(x) = \sup_{1\leqslant k\leqslant n} \left| \sum_{i=1}^{k} f_i \right|$$

atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ *avem*

$$P(|f| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} D^2(f_k).$$

Într-adevăr: să punem

$$A = \{\omega: |f(\omega)| \geqslant \varepsilon\}, \; s_k = \sum_{i=1}^{k} f_i$$

şi

$$A_k = \{\omega: |s_k(\omega)| \geqslant \varepsilon\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \{\omega; |s_i(\omega)| < \varepsilon\} \right).$$

Rezultă relaţiile

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \; A_i \cap A_j = \varnothing, \; i \neq j. \text{ Atunci}$$

$$\int_{A_k} s_n^2 dP = \int_{A_k} s_k^2 dP + \sum_{k<i\leqslant n} \int_{A_k} f_i^2 dP \geqslant \int_{A_k} s_k^2 dP \geqslant \varepsilon^2 P(A_k),$$

de unde obţinem

$$\sum_{k=1}^{n} D^2(f_k) = D^2(s_n) = \int_E s_n^2 dP \geqslant \int_A s_n^2 dP =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} s_n^2 dP \geqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\, \varepsilon^2 = P(A)\, \varepsilon^2.$$

O b s e r v a ţ i e. Dacă $M(f_i) \neq 0$, $l \leqslant i \leqslant n$, atunci inegalitatea devine

$$P\left(\sup_{1\leqslant k\leqslant n} \left| \sum_{i=1}^{k} (f_i - M(f_i)) \right| \geqslant \varepsilon \right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} D^2(f_k),$$

Scanned with OKEN Scanner

iar demonstrația se reduce la cazul precedent, considerînd abaterile respective.

Teorema 1. *Dacă* $(f_n)_{n\in N^*} \in SK$, $M(f_n) = 0$, $n \in N^*$ *și* $\sum_{n\in N^*} D^2(f_n) < \infty$, *atunci seria* $\sum_{n\in N^*} f_n$ *converge a.p.t.*

Într-adevăr, iar punem

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

$$a_m = \sup_{k\in N^*} | S_{m+k} - S_m |.$$

$$a = \inf_{m\in N^*} a_m.$$

Atunci pentru convergența seriei $\sum_{n\in N^*} f_n$ este necesar și suficient ca $a = 0$ *a.p.t.* Din prepoziția precedentă, avem

$$P\left(\sup_{1\leqslant k\leqslant n} | S_{m+k} - S_m | \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} D^2(S_{m+k} - S_m) = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=m+1}^{m+n} D^2(f_k),$$

de unde

$$P(a_m \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=m+1}^{\infty} D^2(f_k)$$

și deci

$$P(a \geqslant \varepsilon) \leqslant P(a_m \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=m+1}^{\infty} D^2(f_k)$$

pentru orice m. Seria $\sum_{n\in N^*} D^2(f_n)$ fiind convergentă, rezultă că $P(a \geqslant \varepsilon) = 0$; $\varepsilon > 0$ fiind arbitrar, rezultă $a = 0$ *a.p.t.* Dăm și următorul rezultat, într-un anumit sens reciproc teoremei 1.

Teorema 2. *Dacă* $(f_n)_{n\in N^*} \in (SK)$, $M(f_n) = 0$, $n \in N^*$ $|f_n| < C$, $n \in N^*$ *și dacă seria* $\sum_{n\in N^*} f_n$ *converge pe o mulțime de probabilitate pozitivă, atunci*

$$\sum_{n\in N^*} D^2(f_n) < \infty.$$

Din cele două teoreme rezultă că dacă $(f_n)_{n\in N^*} \in (SK)$ și dacă $M(f_n) = 0$, $n \in M^*$, atunci seria $\sum_{n\in N^*} f_n$ sau converge *a.p.t.* sau diverge *a.p.t.*; așadar, măsura mulțimii pe care această serie converge este sau 1 sau 0.

Teorema 3. *Dacă* $(f_n)_{n\in N^*} \in (SK)$, $|f_n| < C$, $n \in N^*$ seria $\sum_{n\in N^*} f_n$ *converge a.p.t., atunci și numai atunci cînd seriile*

$$\sum_{n\in N^*} M(f_n) \text{ și } \sum_{n\in N^*} D(f_n) \text{ converg.}$$

Demonstrație. Suficiența ($\sum_n M(f_n)$, $\sum_n D^2(f_n)$ converg). Să considerăm șirul $(g_n)_{n\in N^*}$, $g_n = f_n - M(S_n)$, $n\in N^*$; aplicînd teorema 1, rezultă că $\sum_{n\in N^*} f_n$ converge *a.p.t.*

Necesitatea ($\sum_{n\in N^*} f_n$ converge). Să considerăm spațiul produs $E\times E$ și funcția h_n definită pe $E\times E$ prin relația

$$h_n(\xi, \eta) = f_n(\xi) - f_n(\eta).$$

Evident, o dată cu seria $\sum_n f_n$ converge și seria $\sum_n g_n$ și, deoarece

$$M(h_n) = \int_E\int_E h_n d(P\times P) = 0,\ n\in N,^*$$

atunci, din teorema 2, rezultă că $\sum_n D^2(h_n) < \infty$. Însă

$$D^2(h_n) = \int_E\int_E h_n d(P\times P) = \int_E\int_E (f_n(\xi) - f_n(\eta))\, d(P\times P) = 2D^2(f_n)$$

și deci $\sum_n D^2(f_n) < \infty$. Acum, deoarece $D^2(g_n) = D^2(f_n)$, în virtutea teoremei 1, rezultă că g_n converge *a.p.t.*, dar din relațiile

$$M(f_n) = f_n - g_n,\ n\in N^*$$

rezultă tocmai convergența seriei $\sum_{n\in N^*} M(f_n)$.

Teorema 4. *Fie $(f_n)_{n\in N^*}\in(SK)$, C o constantă și $A_n = \{\xi: |f_n(\xi)| \leqslant C\}$. Pentru ca seria $\sum_{n\in N^*} f_n$ să conveargă a.p.t. este necesar și suficient ca să conveargă următoarele trei serii*

(a) $\sum_{n\in N^*} P(\mathbf{C}A_n)$, (b) $\sum_{n\in N^*} \int_{An} f_n dP$,

(c) $\sum_{n\in N^*} \left(\int_{An-} f_n^2 dP - \left(\int_{An} f_n dP\right)^2\right)$.

Demonstrație. Să punem

$$g_n(\xi) = \begin{cases} f_n(\xi), & \xi\in A_n \\ C, & \xi\notin A_n \end{cases}, \qquad h_n(\xi) = \begin{cases} f_n(\xi), & \xi\in A_n \\ -C & \xi\notin A_n \end{cases}.$$

Evident, seriile

$$\sum_{n\in N^*} f_n, \qquad \sum_{n\in N^*} g_n, \qquad \sum_{n\in N^*} h_n,$$

converg în aceleași puncte. Din teorema precedentă (aplicată șirurilor $(g_n)_{n\in N^*}$, $(h_n)_{n\in N^*}$), rezultă că $\sum_{n\in N^*} f_n$ converge *a.p.t.* dacă și numai dacă seriile

$$(d)\ \sum_{n\in N^*} \left(\int_{An} f_n\, dP \pm CP(\mathbf{C}A_n)\right),$$

$$(e)\ \sum_{n\in N^*} \left(\int_{An} f_n^2 dP - \left(\int_{An} f_n dl\right)^2 + C^2P(A_n)\, P(\mathbf{C}A_n) \mp CP(\mathbf{C}A_n)\int_{An} f_n d\right).$$

Rezultă imediat că convergența seriilor (a), (b), (c) este echivalentă cu convergența seriilor (d), (e) și deci teorema este demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL II

LEGEA NUMERELOR MARI. FUNCȚIE CARACTERISTICĂ. LEGI LIMITĂ

Legătura dintre frecvență ca variabilă aleatoare și probabilitate constituie sprijinul principal al aplicațiilor teoriei probabilităților la experiență: această legătură este pusă în evidență de legea numerelor mari, studiată în paragraful 1. Paragraful 2 este consacrat funcției caracteristice, unul din instrumentele cele mai puternice în cercetările probabilistice, mai ales în problemele asimptotice. Paragraful 3 este consacrat repartiției normale, care joacă un rol central în fenomenele întîmplătoare. În sfîrșit, în paragraful 4 se dau cîteva teoreme limită care ne arată că, în condiții suficient de generale, repartiția asimptotică este normală.

§ 1. Legea numerelor mari

1. Proprietăți asimptotice

O problemă proprie calculului probabilităților și deosebit de importantă o constituie legătura dintre frecvența unei variabile aleatoare și probabilitate, care este dată de legea numerelor mari.

Vom stabili cîteva teoreme privind atît șirul de variabile independente cît și cele dependente.

Teorema lui Bernoulli. *Fie A un eveniment, a cărui probabilitate de realizare este p. Să notăm cu f_n numărul care indică de cîte ori s-a realizat A în cele n probe, sau cum se mai numește frecvența relativă. Atunci f_n converge în probabilitate către p.*

Demonstrație. Să notăm cu α numărul care ne arată de cîte ori s-a realizat evenimentul A în cele n probe consecutive. Atunci inegalitatea

$$|f_n - p| < \varepsilon,$$

unde $\varepsilon > 0$ este arbitrar, este echivalentă cu

$$\alpha - np < n\varepsilon,$$

deoarece $f_n = \frac{\alpha}{n}$.

Însă din inegalitatea lui Cebîşev rezultă

$$P(|f_n - p| < {}_n\varepsilon) \geqslant 1 - \frac{\mu^2}{n^2\varepsilon^2},$$

unde μ reprezintă abaterea medie pătratică a variabilei considerate.

În cazul de faţă avem de-a face cu o repartiţie binomială şi am văzut că

$$\mu = \sqrt{npq}$$

şi deci

$$P(|f_n - p| < {}_n\varepsilon) \geqslant 1 - \frac{npq}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Rezultă de aici că f_n converge în probabilitate către p.

O generalizare a teoremei de mai sus este dată de

Teorema lui Poisson. *Fie* $\{A_i\}_{1<i<\infty}$ *un şir de evenimente aleatoare independente a căror probabilitate de realizare are valorile succesive* $p_1, p_2, \ldots$ $\ldots, p_n, \ldots$ *Să notăm* f_n *frecvenţa relativă — numărul care indică de cîte ori s-au realizat evenimentele* $\{A_i\}$ *— şi cu* p *expresia*

$$p = \lim_{n\to\infty} \frac{p_1 + \ldots + p_n}{n}$$

(limită care există). În aceste condiţii f_n *converge în probabilitate către* p.

Demonstraţie. Să notăm cu

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

variabilele aleatoare care iau valoarea 1 ori de cîte ori se realizează evenimentele

$$A_1, A_2, \ldots, A_n,$$

şi valoarea zero cînd aceste evenimente nu se realizează.

Frecvenţa f_n este dată de valoarea luată experimental de variabila

$$X_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}.$$

Să observăm că

$$M(X_n) = M\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} M(\xi_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{n}.$$

Abaterea variabilei X_n este dată de

$$\frac{\alpha}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n} = f_n - \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n},$$

unde am notat cu α valoarea luată de $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. În plus avem

$$M\left[\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n}\right]^2 = \frac{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_n q_n}{n^2},$$

cu alte cuvinte, dacă notăm cu μ abaterea medie pătratică, atunci

$$\mu = \frac{\sqrt{p_1 q_1 + \dots + p_n q_n}}{n}.$$

Din inegalitatea lui Cebîșev rezultă

$$P\left(\left|f_n - \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{p_1 q_1 + \dots + p_n q_n}{n^2 \varepsilon^2}.$$

Însă

$$p_i q_i \leqslant \frac{1}{4},$$

deoarece

$$p_i \geqslant 0, \quad q_i \geqslant 0, \quad p_i + q_i = 1.$$

Atunci

$$p_1 q_1 + \dots + p_n q_n \leqslant \frac{n}{4}$$

și deci

$$P\left(\left|f_n - \frac{p_1 + \dots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Dacă $n \to \infty$, se vede că f_n tinde către p în probabilitate.

Teoremele de mai sus sînt cunoscute sub numele de legea numerelor mari. Vom da acestei legi și alte formulări.

Teoremă. *Fie $\{f_n\}_{1 \leqslant i < \infty}$ un șir de variabile aleatoare, două cîte două independente, care urmează o aceeași repartiție. Să presupunem că:*

$$M(f_k) = M$$

și

$$D(F_k) = D,$$

pentru orice k. Atunci variabila aleatoare

$$\beta_n = \frac{f_1 + f_2 + \dots + f_n}{n}$$

converge în probabilitate către M.

Demonstrație. Se vede imediat că

$$M(\beta_n) = M\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} M(f_i)}{n} = M,$$

iar

$$D^2(\beta_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} D^2(f_i)}{n^2} = \frac{nD^2}{n^2} = \frac{D^2}{n}.$$

Aplicînd inegalitatea lui Cebîșev avem

$$P\left(\left|\beta_n - M\right| \geqslant \lambda \frac{D}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{1}{\lambda^2}.$$

Dacă $\frac{\lambda D}{\sqrt{n}} = \varepsilon$, adică $\lambda = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{D}$, atunci

$$P\left(\left|\beta_n - M\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{D^2}{n\varepsilon^2},$$

de unde rezultă că β_n converge în probabilitate către M.

Teoremă. *Dacă* $\{f_n\}_{1 \leqslant n < \infty}$ *este un șir de variabile aleatoare independente și dacă*

(1) $M(f_k) = M_k$ și $D(f_k) = D_k$ *pentru orice* k;

(2) *există* $\lim_{n\to\infty} \frac{M_1 + M_2 + \ldots + M_n}{n} = M$ *(finit)*,

(3) *notînd cu* $S_n = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \ldots + D_n^2}$ *avem*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0,$$

atunci variabila aleatoare

$$\beta_n = \frac{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}{n}$$

converge în probabilitate către M.

Demonstrație. Se vede că

$$M(\beta_n) = \frac{M_1 + M_2 + \ldots + M_n}{n}$$

și

$$D^2(\beta_n) = \frac{S_n}{n}.$$

Atunci din inegalitatea lui Cebîșev rezultă că

$$P\left(|\beta_n - M| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant P\left(|\beta_n - M(\beta_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant \frac{4S_n^2}{\varepsilon^2 n^2},$$

deoarece dacă n este suficient de mare $|M(\beta_n) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$ dar aceasta e posibil dacă $|\beta_n - M| \geqslant \varepsilon$ și $|\beta_n - M(\beta_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Ținînd seama de condiția (3), teorema este demonstrată.

Această teoremă a fost formulată de Markov.

Pînă acum am stabilit legea numerelor mari numai în cazul independenței variabilelor aleatoare. Vom da acum o teoremă, datorită lui S. N. Bernstein, în care nu vom mai presupune independența.

Teoremă. *Fie* $\{f_n\}_{1 \leqslant n < \infty}$ *un șir de variabile aleatoare. Dacă*

$$(1)\ \textit{există}\quad M(f_k) = M_k \quad \text{și} \quad M_n^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_i}{n},$$

$$\textit{iar}\quad \lim_{n\to\infty} M_n^* = M;$$

(2) *există* $D(f_k) = D_k$ *și* $S_n = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \ldots + D_n^2}$, *atunci* $S_n \leqslant Kn$ *unde* K *este o constantă ce nu depinde de* n;

(3) *notînd cu* R_{ij} *coeficientul de corelație al variabilelor* f_i *și* f_j, $R_{ij} \leqslant R(|i-j|)$, *unde* $R(0) = 1$, $R(k) \geqslant 0$ *și*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} R(i) = 0,$$

atunci șirul

$$\beta_n = \frac{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}{n}$$

converge în probabilitate către M.

Demonstrație. Este suficient să arătăm că

$$\lim_{n\to\infty} D(\beta_n) = 0.$$

Ținînd seama de definiția dispersiei și aceea a coeficientului de corelație, rezultă că:

$$D^2(\beta_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D_i D_j R_{ij} \leqslant \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D_i D_j R(|i-j|)$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, după un calcul simplu,

$$D^2(\beta_n) \leqslant \frac{1}{n^2}\left(\frac{S^2}{n} + 2\sum_{k=1}^{n-1} R(k)\left(\sum_{i=1}^{n-k} D_i D_{i+k}\right)\right).$$

Însă din inegalitățile stabilite pentru momente avem

$$\sum_{i=1}^{n-k} D_i D_{i+k} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n-k} D_i^2 \sum_{i=1}^{n-k} D_{i+k}^2} \leqslant S_n^2$$

și deci

$$D^2(\beta_n) \leqslant \frac{S_n^2}{n^2} + \frac{2S_n^2}{n}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} R(k)}{n}\right).$$

Din condiția (2) ținînd seama că $S_n^2 \leqslant Kn$, avem

$$D^2(\beta_n) \leqslant \frac{k}{n} + 2k\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} R(k)}{n}\right) \leqslant 3k\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} R(k)}{n}\right)$$

și deci din condiția (3) rezultă că variabila aleatoare β_n converge în probabilitate către M.

În teoremele de mai sus am presupus numai convergența în probabilitate. Se poate da o teoremă care ne arată în ce condiții un șir de variabile aleatoare converge aproape sigur. Vom obține astfel *legea tare a numerelor mari.*

Teoremă. *Fie* $\{f_n\}_{1 \leqslant n < \infty}$ *un șir de variabile aleatoare. Dacă*

(1) $M(f_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$

(2) $M(f_k) \leqslant L, \quad k = 1, 2, \ldots,$

(3) *variabilele aleatoare* f_n *sînt 4 cîte 4 independente. Atunci șirul*

$$\beta_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i$$

converge aproape sigur către zero.

Demonstrație. Avem

$$M_4(\beta_n) = \frac{1}{n^4}\left(\sum_{i=1}^{n} M_4(f_i) + 6\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} M(f_i^2 f_j^2)\right),$$

deoarece momentele de ordinul întîi sînt nule.

Rezultă că

$$M_4(\beta_n) \leqslant \frac{1}{n^4}\left(nL + 6\frac{n(n-1)}{2}L\right) \leqslant \frac{1}{n^4}(nL + 3n^2L) \leqslant 5\frac{L}{n^2}$$

și deci seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_4(\beta_n)$$

este convergentă. Din inegalitatea lui Cebîșev rezultă însă

$$P(|f_n| \leqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{M_4(\beta_n)}{\varepsilon^4},$$

iar după inegalitatea lui Boole

$$P(|\beta_n| \leqslant \varepsilon,\ |\beta_{n+1}| \leqslant \varepsilon, \ldots) \geqslant 1 - \sum_{i=n+1}^{\infty} P(|\beta_n| \geqslant \varepsilon) \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \frac{\sum_{i=n+1}^{\infty} (\beta_i)}{\varepsilon^4}$$

și cum seria $\sum_{i=1}^{\infty} M_4(\beta_i)$ este convergentă, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} P(|\beta_n| \leqslant \varepsilon,\ |\beta_{n+1}| \leqslant \varepsilon, \ldots) = 1,$$

deci șirul β_n converge tare. Cum convergența tare este echivalentă cu cea aproape sigură, teorema este demonstrată.

2. Stabilitate

Fie A_i un șir numărabil de evenimente, dependente sau nu, compatibile sau nu, definite pe o aceeași categorie de experiențe. Să notăm cu $f_{(n)}$ frecvența, iar cu $f^{(n)}$ repartiția primelor n evenimente.
Evident că

$$f_{(n)} = \frac{f^{(n)}}{n}.$$

În plus se observă că

$$f^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} C_{A_j}$$

dacă notăm cu C_{A_j} funcția caracteristică a evenimentului A_j, cu alte cuvinte

$$C_{A_j}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \xi \in A_j \\ 0 & \text{dacă } \xi \notin A_j. \end{cases}$$

Vom da acum cîteva definiții:

Vom spune că șirul de evenimente $\{A_j\}_{1\leqslant j<\infty}$ *este stabil dacă șirul*

$$(f_{(n)} - M_1(f_{(n)}))_{1\leqslant n<\infty}$$

converge în probabilitate către zero și este tare stabil dacă același șir converge tare către zero.

Evident că teoremele domonstrate în paragraful precedent se pot formula cu uşurinţă ţinînd seama de definiţia dată stabilităţii unui şir.

3. Legea numerelor mari pentru variabile aleatoare legate

În cele ce urmează ne propunem să stabilim unele proprietăţi ale unui şir de evenimente $\{A_j\}_{1\leqslant j<\infty}$ (părăsind condiţia de independenţă).

Să punem

$$\sum_{j=1}^{n} P(A_j) = S_1(n) = np_1(n)$$

şi

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} P(A_i \cap A_j) = S_2(n) = C_n^2 p_2(n),$$

unde

$$0 \leqslant p_1(n) \leqslant 1 \quad \text{şi} \quad 0 \leqslant p_2(n) \leqslant 1.$$

Atunci

$$M_1(f^{(n)}) = \sum_{j=1}^{n} M_1(C_{A_j}),$$

deoarece am văzut că

$$f^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} C_{A_j}.$$

Avem

$$M_1(f^{(n)}) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) = np_1(n) = S_1(n)$$

şi deci

$$M_1\left(\frac{f^{(n)}}{n} - f_{(n)}\right) = p_1(n).$$

Pe de altă parte

$$D^2(f^{(n)}) = M_2(f^{(n)}) - S_1^2(n) = \sum_{j=1}^{n} M_2(C_{A_j}) + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} M_1(C_{A_j \cap A_i}) - S_1^2(n) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P(A_j) + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} P(A_i \cap A_j) - S_1^2(n) = S_1(n) + 2S_2(n) - S_1^2(n),$$

de unde

$$D^2(f_n) = \frac{2S_2(n)}{n^2} + \frac{S_1(n)}{n^2} - \frac{S_1^2(n)}{n^2} = \frac{2C_n^2 p_2(n)}{n^2} + \frac{np_1(n)}{n^2} -$$

$$- \frac{n^2 p_1^2}{n^2} = \frac{n-1}{n} p_2(n) + \frac{p_1(n)}{n} - p_1^2(n) = p_2(n) - p_1^2(n) + \frac{p_1(n) - p_2(n)}{n}.$$

Să notăm

$$d_n^2 = p_2(n) - p_1^2(n).$$

Cum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1(n) - p_2(n)}{n} = 0,$$

rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0$$

dacă și numai dacă

$$\lim_{n\to\infty} D(f_{(n)}) = 0.$$

Pentru orice $\varepsilon > 0$, aplicînd inegalitatea lui Cebîșev (la dreapta) și a lui Kolmogorov (la stînga) unde am luat $M = 1$, avem

$$D^2 f_{(n)} - \varepsilon^2 \leqslant P(|f_{(n)} - M(f_{(n)})| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D^2(f_{(n)})}{\varepsilon^2}.$$

Deci pentru ca șirul $\{A_j\}_{1\leqslant j<\infty}$ să fie stabil, este necesar și suficient ca

$$\lim_{n\to\infty} D(f_{(n)}) = 0.$$

Ținînd seama de acestea, rezultă imediat următoarea

Teoremă. *Șirul de evenimente $\{A_j\}_{1\leqslant j<\infty}$ este stabil dacă și numai dacă*

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0.$$

O b s e r v a ț i e. Dacă evenimentele $A_j (1 \leqslant j < \infty)$ au aceeași probabilitate p și dacă sînt independente, atunci

$$p_1(n) = p$$

și

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} P(A_i \cap A_j) = C_n^2 p^2$$

sau

$$p_2(n) = p^2$$

și deci

$$d_n = p_2(n) = p^2 - p^2 = 0.$$

Se obține o teoremă pe care am stabilit-o în paragraful precedent.

Teoremă. *Dacă există o constantă C astfel încît $d_n^2 \leqslant \frac{C}{n}$ pentru orice $n \in N^*$, atunci șirul $\{A_j\}_{1\leqslant j<\infty}$ este tare stabil.*

Demonstrație. Fie $\nu \in N^*$. După inegalitatea lui Cebîșev obținem

$$P(|f_{(\nu^2)} - M_1(f_{(\nu^2)}| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D^2(f_{(\nu^2)})}{\varepsilon^2}.$$

Însă

$$nD^2(f_{(n)}) = nd_n^2 + p_1(n) - p_2(n) \leqslant C + 1$$

pentru $n \in N^*$. Deci

$$\frac{D^2(f_{(\nu^2)})}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{C+1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{\nu^2}.$$

De aici, rezultă că

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{D^2(f_{(\nu^2)})}{\varepsilon^2} < \infty.$$

După inegalitatea lui Boole, avem

$$P(|f_{(n^2)} - M(f_{(n^2)})| \leqslant \varepsilon, \ |f_{(n+1)^2} - M(f_{(n+1)^2})| \leqslant \varepsilon \ldots) \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \frac{\sum_{\nu=n}^{\infty} D^2 f_{(\nu^2)}}{\varepsilon^2},$$

ceea ce arată că șirul

$$(f_{(\nu^2)} - M_1(f_{(\nu^2)}))_{1 \leqslant \nu < \infty}$$

converge tare către zero. Se poate arăta că șirul $(f_{(n)} - M(f_{(n)})$ converge tare exceptînd o mulțime de probabilitate nulă.

Observație. În condițiile observației precedente, șirul de evenimente $\{A_j\}_{1 \leqslant j < \infty}$ este tare stabil. Avem

$$d_n = 0$$

și se poate aplica teorema de mai sus.

Fie

$$(T) \quad \begin{cases} x_{11} \\ x_{21}, \ x_{22} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n1}, \ x_{n2}, \ldots, \ x_{nn} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

un tablou de variabile aleatoare, cu doi indici în general legați definite pe un cîmp de probabilitate $\{\Omega, K, P\}$.

Presupunem, în cele ce urmează, că variabilele aleatoare din tabloul (T), au momente de ordinul doi finite și valoarea medie egală cu zero, adică

$$M(x_{n,i}) = 0 \qquad \text{pentru } i = 1, 2, \ldots, n; \ n = 1, 2 \ldots$$
$$M_2(x_{n,i}) < \infty$$

Pentru orice $\nu (1 \leqslant \nu \leqslant n)$ vom nota

$$S_{(n\nu)} = \sum_{j=1}^{\nu} Xn_j.$$

Rezultă că

$$M(S_{(nv)}) = 0.$$

Vom nota prin

$$M_{S(n,\,i-1)}(X_{ni})$$

valoarea medie condiționată a variabilei X_{ni} cînd se cunoaște valoarea realizării lui $S_{(n,\,i-1)}$. Evident că pentru $i = 1$, $S_{(n)}$ și $M_{S(n,\,i-1)}(X_{ni})$ nu are sens. Vom lua însă $S_{(n,\,1)} = 0$ și $M_{S(n,i-1)}(X_{n,1}) = M(X_{n,1})$. Vom spune că tabloul (T) are proprietatea (C) dacă

$$(C) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} D^2(M_{S(n,\,i-1)}(X_{ni})) = 0.$$

Teoremă. *Dacă ipoteza* (C) *este îndeplinită și dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M(X_{ni}^2) = 0,$$

atunci șirul $(S_{(n,n)})$ $1 \leqslant n < \infty$ *converge către zero în probabilitate.*

Demonstrație. a) Să punem pentru fiecare n

$$M_n = \sup_{i=1,\,\ldots,\,n} M(S_{(n,\,i-1)}^2)$$

și să demonstrăm că în ipotezele de mai sus M_n rămîne mărginit. Fie ν un întreg cuprins între 1 și n—1, pentru care

$$M_n = M(S_{(n\nu)}^2).$$

Avem

$$M_n = M(S_{(n\nu)}^2) \leqslant \left| M\left(S_{(n\nu)}^2\right) - \sum_{j=1}^{\nu} M(X_{nj}^2) \right| + \sum_{j=1}^{\nu} M(X_{nj}^2) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left| \sum_{1\leqslant i<j\leqslant \nu} M(X_{ni}\, X_{nj}) \right| + \sum_{j=1}^{\nu} M(X_{nj}^2)$$

și, prin urmare, pentru a demonstra că șirul M_n rămîne mărginit este suficient să arătăm că primul termen al sumei precedente rămîne mărginit. Dar

$$\left| \sum M(X_{ni}\, X_{nj}) \right| = \left| \sum_{i=1} M(S_{(n,\,i-1)}\, X_{ni}) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{\nu} M(S_{(n,\,i-1)}\, M_{S(n,\,i-1)}(X_{ni})) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\nu} \left(M(S_{(n,\,i-1)}^2)\right)^{\frac{1}{2}} D^2(M_{S(n,\,i-1)}(X_{ni})) \leqslant$$

$$\leqslant M_n \sum_{i=1}^{\nu} D^2(M_{S(n,\,i-1)}(X_{ni})).$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare,

$$\left| M_n - \sum_{i=1}^{\nu} M(X_{ni}^2) \right| \leqslant 2\sqrt{M_n D}$$

și din această inegalitate se deduce imediat că șirul $(S_{(n,n)})_{1 \leqslant n < \infty}$ rămîne mărginit. Aceasta este evident, deoarece dacă

$$|M_n - L_n| \leqslant \sqrt{M_n} H_n$$

și

$$\lim_{n \to \infty} L_n = \operatorname{Lim}_{n \to \infty} H_n$$

atunci se deduce că

$$\sqrt{M_n} \leqslant \frac{L_n}{\sqrt{H_n}} + H_n.$$

b) Să demonstrăm acum că șirul $(S_{(n,n)})_{1 \leqslant n < \infty}$ converge către zero în probabilitate. Avem

$$P(|S_{(n,n)}| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} M(S_{(n,n)}^2)$$

și prin urmare pentru a demonstra teorema este suficient să arătăm, în ipotezele noastre, că

$$\lim_{n \to \infty} M(S_{(n,n)}^2) = 0.$$

Procedînd ca mai sus obținem

$$M(S_{(n,n)}^2) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M(X_{ni}^2) + 2 \sum_{i=1}^{n} M(S_{(n,i-1)}^2)^{1/2} D^2(M_{S(n,i-1)}(X_{ni})) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} M(X_{ni}^2) + 2\sqrt{M_n} \sum_{i=1}^{n} D^2(M_{S(n,i-1)}(X_{ni}))$$

și, prin ipoteză,

$$\lim_{n \to \infty} M(X_{ni}) = 0.$$

Cum ipoteza (C) este verificată, și cum șirul M_n este mărginit, urmează că

$$\lim_{n \to \infty} M(S_{(n,n)}^2) = 0.$$

Deci teorema este demonstrată.

În mod analog se demonstrează și următoarea teoremă, pe care ne mărginim numai să o enunțăm.

Teoremă. *Dacă ipoteza (C) este îndeplinită și dacă*

$$\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} M(S_{(n,i)}^2) > \beta > 0,$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M\left(S^2_{(n,n)}\right)}{\sum_{i=1}^{n} M\left(X^2_{ni}\right)} = 1.$$

O b s e r v a ț i e. *Legea numerelor mari*, exprimată printr-o convergență în probabilitate, nu caracterizează, nu este o caracteristică pentru șirurile de variabile aleatoare.

Vom da o schemă simplă, care se datorește lui Markov, și se va vedea că nu se poate vorbi în general despre convergență (în sensul analizei, în probabilitate etc.).

Să considerăm o urnă conținînd două bile: una albă și una neagră. Se fac extracții din această urnă, după următoarea regulă: bila ieșită este înlocuită cu două bile de aceeași culoare.

După n extracții, putem scoate

$$0,1 \ldots, n$$

bile albe avînd probabilitățile

$$P_n(0), P_n(1), \ldots, P_n(n)$$

unde $P_n(n)$ este probabilitatea ca după n extracții să fi scos n bile albe.

Din ipoteza considerată rezultă următoarea relație de recurență

$$P_n(k) = \frac{k}{n+1} P_{n-1}(k-1) + \frac{n-k}{n+1} P_{n-1}(k).$$

Presupunînd că

$$P_{n-\alpha}(k-1) = P_{n-1}(k) = \frac{1}{n},$$

avem

$$P_n(k) = \frac{1}{n+1}$$

Deci dacă presupunem că

$$P_{n-1}(k) = \frac{1}{n}.$$

oricare ar fi k, rezultă că

$$P_n(k) = \frac{1}{n+1}.$$

Cum

$$P_n(0) = P_1(1) = \frac{1}{2},$$

atunci

$$P_n(k) = \frac{1}{n+1}$$

este adevărată pentru orice n și k.

Rezultă că probabilitățile ca în n extracții să se obțină frecvențele

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$$

sînt respectiv,

$$\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{n+1}.$$

Cum toate frecvențele sînt egal probabile, nu poate fi vorba de vreo convergență.

§ 2. Funcție caracteristică

1. Definiții, proprietăți

În cele expuse pînă acum ne-am ocupat numai de variabile aleatoare reale.

Vom numi variabilă aleatoare complexă orice expresie complexă aleatoare $Z = X + iY$, a cărei parte reală X și parte imaginară Y sînt variabile aleatoare reale. O variabilă aleatoare poate fi interpretată, ținînd seama de reprezentarea grafică a unui număr complex, ca un punct aleator $M(X, Y)$ în plan.

Valoarea medie corespunzătoare variabilei Z este prin definiție

$$M(Z) = M(X) + iM(Y).$$

Fie X o variabilă aleatoare reală, avînd funcția de repartiție $F(x)$. Să considerăm expresia

$$e^{itX} = \cos t X + i \sin tX,$$

unde t este o constantă reală oarecare. Această expresie este o variabilă aleatoare complexă al cărei modul este întotdeauna egal cu 1 și deci mărginită. Valoarea medie a acestei variabile există și este o funcție $\varphi(t)$ de variabilă reală t, pe care o vom numi *funcție caracteristică* a variabilei X.

Dacă X este o variabilă aleatoare discontinuă, atunci

$$\varphi(t) = M(e^{itX}) = \sum_r p_r e^{it x_r} = \sum_r p_r \cos t x_r + i \sum_r p_r \sin t x_r,$$

iar dacă variabila X are funcția de repartiție F, atunci

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x).$$

Dacă $\rho(x)$ este densitatea de repartiție a variabilei X,

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, \rho(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx \rho(x)\, dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin tx \rho(x)\, dx$$

Am văzut că fiecărei variabile aleatoare îi corespunde o funcție de repartiție $F(x)$ și o funcție caracteristică $\varphi(t)$.

Calculul direct cu funcțiile de repartiție prezintă dificultăți, deoarece aceste funcții sînt, în general, discontinue, pe cînd funcțiile caracteristice sînt funcții continue față de t, cu valori complexe.

Să stabilim cîteva proprietăți importante ale funcțiilor caracteristice.

Teorema 1. *Funcția caracteristică verifică următoarele relații*

$$\varphi(0) = 1, \quad |\varphi(t)| \leqslant 1, \quad (-\infty < t < +\infty).$$

Demonstrație. Din definiția funcției caracteristice rezultă:

$$\varphi(0) = M(e^0) = 1$$

și, de asemenea,

$$|\varphi(t)| = |M(e^{itx})| \leqslant M(|e^{itx}|) = 1.$$

Teorema 2. *Funcția caracteristică este uniform continuă pe dreapta reală.*

Demonstrație. Am văzut că pentru o variabilă aleatoare f există descompunerea momentului:

$$M(f) = M_{\mathbf{C}_A}(f)\, P(\mathbf{C}A) + M_A(f)\, P(A).$$

Deci

$$\varphi(t) = M(e^{itx}) = M_{\mathbf{C}_{A_\lambda}}(e^{itx})\, P(\mathbf{C}A_\lambda) + M_{A_\lambda}(e^{itx})\, P(A_\lambda),$$

unde am notat cu

$$A_\lambda = \{\omega : |f(\omega)| > \lambda\}$$

iar $\lambda > 0$. Să presupunem că pentru orice $\varepsilon > 0$

$$P(A_\lambda) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Să observăm că

$$|M_{A_\lambda}(e^{itx})| \leqslant 1$$

și deci

$$|\varphi(t) - M_{\mathbf{C}_{A_\lambda}}(e^{itx})\, P(\mathbf{C}A_\lambda)| \leqslant P(A_\lambda). < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Să scriem această inegalitate pentru t_1 și t_2 oarecari.

Avem:

$$|\varphi(t_1) - M_{\mathbf{C}_{A_\lambda}}(e^{it_1x})\, P(\mathbf{C}A_\lambda)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

și

$$|\varphi(t_2) - M_{\mathbf{C}_{A_\lambda}}(e^{it_2x})\, P(\mathbf{C}A_\lambda)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din cele două inegalități de mai sus rezultă

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leqslant |M_{\mathbf{C}A_\lambda}(e^{it_2x}) - M_{\mathbf{C}A_\lambda}(e^{it_1x})|\, P(\mathbf{C}A_\lambda) + 2\frac{\varepsilon}{3}$$

care se mai poate scrie

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leqslant M_{\mathbf{C}A_\lambda}(|e^{it_2x} - e^{it_1x}|) + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Dacă $|t_2 - t_1| < \frac{\varepsilon}{3\lambda} = \delta(\varepsilon)$, atunci $|e^{it_2x} - e^{it_1x}| < \frac{\varepsilon}{3}$, cu $|x| \leqslant \lambda$,

și deci

$$M_{\mathbf{C}A_\lambda}(|e^{it_2x} - e^{it_1x}|) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De unde rezultă că dacă $|t_2 - t_1| < \delta(\varepsilon)$, atunci

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < \varepsilon.$$

Teorema 3. *Fie f și g două variabile aleatoare. Dacă $g = af + b$, a și b, fiind două constante, atunci*

$$\varphi_g(t) = e^{ibt}\varphi_f(at),$$

unde am notat cu $\varphi_g(t)$ și $\varphi_f(t)$ funcțiile caracteristice ale variabilei g, respectiv f.

Demonstrație. Avem

$$\varphi_g(t) = M(e^{itg}) = M(e^{it(af+b)}) = e^{itb}\, M(e^{itaf}),$$

de unde rezultă că

$$_g(t) = e^{ibt}\varphi_f(at).$$

Teorema 4. *Funcția caracteristică a sumei a două variabile aleatoare independente este egală cu produsul funcțiilor caracteristice corespunzătoare celor două variabile.*

Demonstrație. Fie f și g două variabile aleatoare independente și $h = f + g$. Atunci

$$\varphi_h(t) = M(e^{ith}) = M(e^{it(f+g)}) = M(e^{itf})\, M(e^{itg}),$$

de unde rezultă

$$\varphi_h(t) = \varphi_f(t)\,\varphi_g(t).$$

O b s e r v a ț i e. Dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sînt variabile aleatoare independente și

$$h = f_1 + f_2 + \ldots + f_n,$$

atunci

$$\varphi_h(t) = \varphi_{f_1}(t) \ldots \varphi_{f_n}(t).$$

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 5. *Dacă momentul absolut de ordinul n $(n > 0)$ al repartiției $F(x)$ există, atunci derivata $\varphi^{(n)}(t)$ există pentru orice n și au loc relațiile:*

$$\varphi^n(t) = i^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x),$$

$$M_n(f) = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{i^n}.$$

Demonstrație. Dacă derivam în mod formal de n ori funcția caracteristică

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x),$$

obținem

$$\varphi^{(n)}(t) = i^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n\, e^{itx}\, dF(x).$$

Însă

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x^n\, e^{itx}\, dF(x) \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |x^n|\, dF(x).$$

Integrala din membrul doi al inegalității de mai sus există, deoarece reprezintă momentul absolut de ordinul n al variabilei X și deci există și integrala

$$i^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n\, e^{itx}\, dF(t) = \varphi^{(n)}(t).$$

Dacă în această egalitate facem $t = 0$, avem

$$\varphi^n(0) = i^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n\, dF(x)$$

sau

$$\frac{\varphi^{(n)}(0)}{i^n} = M_n(f).$$

Teorema 6. *Pentru orice t, $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$.*

Demonstrație. Dacă f_1 și f_2 sînt variabile aleatoare și $f_2 = \overline{f_1}$, atunci $M(f_2) = \overline{M(f_1)}$. Deci

$$\varphi(-t) = M(e^{-itx}) = \overline{M(e^{itx})} = \overline{\varphi(t)}.$$

Teorema 7. (R a i k o v). *Dacă $\varphi(t)$ este o funcție* caracteristică reală, atunci $1 - \varphi(2t) \leqslant 4(1 - \varphi(t))$ *pentru orice $t \in R$.*

Demonstrație. Dacă $\varphi(t)$ este o funcție caracteristică reală, atunci

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx\, dF(x).$$

Putem scrie

$$1 - \varphi(2t) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos 2tx)\, dF(x) = 2\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 tx\, dF(x) =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos^2 tx)\, dF(x) = 2\int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos tx)(1 + \cos tx)\, dF(x) \leqslant$$

$$\leqslant 4\int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos tx)\, dF(x) = 4\,(1 - \varphi(t))$$

și deci

$$1 - \varphi(2t) \leqslant 4\,(1 - \varphi(t))$$

pentru orice $t \in R$.

Teorema 8. *Pentru orice t și $h \in R$ avem*

$$|\varphi(t) - \varphi(t + h)|^2 \leqslant 2\varphi(0)\,\{\varphi(0) - R\,\varphi(h)\},$$

unde $R\,\varphi(h)$ este partea reală a funcției $\varphi(h)$.

Demonstrație. Din inegalitatea lui Schwarz, avem

$$|\varphi(t) - \varphi(t + h)|^2 = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}(1 - e^{ihx})\, dF(x)\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) \int_{-\infty}^{\infty} \left|1 - e^{ihx}\right|^2 dF(x) = 2\varphi(0)\int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos hx)\, dF(x) =$$

$$= 2\varphi(0)\,\{\varphi(0) - R\,\varphi(h)\}$$

și cu aceasta teorema este demonstrată.

2. Teoreme de inversiune

Teorema. *Fie $\varphi(t)$ funcția caracteristică a repartiției $F(x)$. Dacă x_1 și x_2 sînt puncte de continuitate ale funcției $F(x)$, atunci*

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{c \to \infty} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi(t)dt.$$

Această teoremă este întîlnită sub numele de teorema de inversiune a funcției caracteristice.

Demonstrație. Să notăm

$$I_c = \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi(t)dt.$$

Ținînd seama că

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ita}\, dF(a).$$

avem

$$I_c = \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ita}\, dF(a)\right) dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-c}^{c} \frac{e^{it(a-x_1)} - e^{it(a-x_2)}}{it}\, dt\right)\cdot dF(a).$$

Însă $e^{itx} = \cos tx + i \sin tx$ și deci

$$I_c = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^c \frac{\sin t(a-x_1)}{t}\, dt - \int_0^c \frac{\sin t(a-x_2)}{t}\right) dF(a).$$

Să ne ocupăm de integrala

$$\frac{1}{\pi}\int_0^c \frac{\sin t(a-x_1)}{t}\, dt.$$

Notînd $a - x_1 = \alpha$, avem

$$\frac{1}{\pi}\int_0^c \frac{\sin t\alpha}{t}\, dt.$$

Să presupunem că $\alpha > 0$ și să facem schimbarea de variabilă $\alpha t = u$, atunci

$$\frac{1}{\pi}\int_0^c \frac{\sin t\alpha}{t}\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha c} \alpha \frac{\sin u}{u}\, \frac{du}{\alpha} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha c} \frac{\sin u}{u}\, du.$$

Știm însă că

$$\lim_{c\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha c} \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{1}{2}.$$

Analog, dacă $\alpha < 0$, obținem

$$\lim_{c\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha c} \frac{\sin u}{u}\, du = -\frac{1}{2}.$$

Putem scrie ca

$$\lim_{c\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^c \frac{\sin \alpha t}{t}\, dt = \begin{cases} -\frac{1}{2} \text{ dacă } & \alpha < 0 \\ 0 \text{ dacă } & \alpha = 0. \\ \frac{1}{2} \text{ dacă } & \alpha > 0. \end{cases}$$

În plus, se observă imediat că

$$(*)\quad \left|\frac{1}{\pi}\int_0^c \frac{\sin \alpha t}{t}\, dt\right| < 1.$$

Să punem

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_0^c \frac{\sin t(a-x_1)}{t}\, dt - \int_0^c \frac{\sin t(a-x_2)}{t}\, dt\right) = g(a, c;\ x_1, x_2).$$

Această funcție o vom nota pentru simplificarea scrierii, și cu $g(a)$. Atunci

$$\lim_{c\to\infty} g(c, a;\ x_1, x_2) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x_1 < a < x_2 \\ -\frac{1}{2} \text{ dacă } a = x_1 \\ \frac{1}{2} \text{ dacă } a = x_2 \\ 0 \text{ dacă } a < x_1 \text{ sau } a > x_2. \end{cases}$$

Fie acum $\delta > 0$, astfel încît $x_1 + \delta < x_2 - \delta$. Avem

$$I_c = \int_{-\infty}^{x_1-\delta} g(a)\, dF(a) + \int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} g(a)\, dF(a) + \int_{x_1+\delta}^{x_2-\delta} g(a)\, dF(a) + \int_{x_2-\delta}^{x_2+\delta} g(a)\, dF(a) + \int_{x_2+\delta}^{\infty} g(a)\, dF(a).$$

Însă

$$\lim_{c\to\infty} \int_{x_2+\delta}^{\infty} g(a)\, dF(a) = 0 \text{ și } \lim_{c\to\infty} \int_{-\infty}^{x_1-\delta} g(a)\, dF(a) = 0,$$

iar

$$\lim_{c\to\infty} \int_{x_1+\delta}^{x_2-\delta} g(a)\, dF(a) = \int_{x_1+\delta}^{x_2-\delta} dF(a) = F(x_2 - \delta) - F(x_1 + \delta).$$

Ținînd seama de inegalitatea (*), avem

$$\left| \int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} g(a)\, dF(a) \right| \leqslant 2 \int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} dF(a) = 2\,(F(x_1 + \delta) - F(x_1 - \delta))$$

și

$$\left| \int_{x_2-\delta}^{x_2+\delta} g(a)\, dF(a) \right| \leqslant 2 \int_{x_2-\delta}^{x_2+\delta} dF(a) = 2\,(F(x_2 + \delta) - F(x_2 - \delta)).$$

Cum x_1 și x_2 sînt puncte de continuitate, obținem

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi(t)\, dt = F(x_2) - F(x_1).$$

Aplicație. Să determinăm funcția de repartiție corespunzătoare funcției caracteristice $e^{-\frac{t^2}{2}}$. Din teorema de inversiune avem

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-itx}}{it} \varphi(t)\, dt$$

unde x este punct de continuitate. Cum $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, rezultă că

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{i-tx}}{it} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin tx}{t} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos tx}{it} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Deoarece

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos tx}{it} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 0,$$

avem

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin tx}{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Să calculăm acum pe $F'(x)$ și să integrăm prin părți. Obținem

$$F'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos xt\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{\sin xt}{\pi x}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\pi x}\int_0^{\infty} t \sin tx\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi x}\int_0^{\infty} t \sin tx\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Analog vom obține

$$F''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} t \sin tx\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Din expresia lui $F'(x)$ și $F''(x)$ rezultă că

$$F'(x) = -\frac{1}{x} F''(x).$$

Integrînd această ecuație diferențială obținem

$$F'(x) = C e^{-\frac{x^2}{2}}$$

sau

$$F(x) = C\int_{-x}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt + C_0.$$

Pentru determinarea constantelor C și C_0 să observăm că

$$F(-\infty) = 0 = C_0$$

și

$$F(+\infty) = 1 = C\sqrt{2\pi} + C_0.$$

deoarece

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{2\pi}.$$

Rezultă deci că $C_0 = 0$ și $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Astfel am obținut funcția de repartiție

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

O b s e r v a ț i e. Am văzut că

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x} \frac{1 - e^{-itx}}{it} \varphi(t)\, dt.$$

De aici se obține imediat, dacă repartiția $F(x)$ are o densitate că

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, e^{-itx}\, dt.$$

Așadar, putem să determinăm, aplicînd formula de inversiune, și densitatea de repartiție.

Ca aplicație, să presupunem că

$$\varphi(t) = e^{-|t|}$$

care este funcția caracteristică a repartiției Cauchy și ne propunem să determinăm densitatea de repartiție a acestei legi. Avem

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-itx}\, dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{t} e^{-itx}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t} e^{-itx}\, dt \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-t} (e^{itx} + e^{-itx})\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-t} \cos tx\, dt.$$

Integrînd prin părți vom obține

$$f(x) = \frac{1}{\pi} (-e^{-t}) \cos tx \Big|_0^{\infty} - \frac{x}{\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-t} \sin tx\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{x}{\pi} (e^{-t} \sin tx) \Big|_0^{\infty} - \frac{x^2}{\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-t} \cos tx\, dt.$$

De unde rezultă

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi} - x^2 \rho(x)$$

și deci

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad (-\infty < x < \infty).$$

Formula de mai sus

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)\,dt$$

se poate stabili utilizînd următorul raționament:

Să considerăm integrala

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)\,dt.$$

Cum însă

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}\rho(u)\,du,$$

avem

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}\rho(u)\,du\right\}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{it(u-x)}\rho(u)\,du\right\}dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{it(u-x)}\rho(u)\,du\right\}dt$$

sau

$$I = \lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(u)\left\{\int_{-T}^{T} e^{it(u-x)}\,dt\right\}du.$$

să observăm însă că

$$I_T = \int_{-T}^{T} e^{it(u-x)}\,dt = \frac{e^{iT(u-x)} - e^{-iT(u-x)}}{i(u-x)}$$

și, ținînd seama de formulele lui Euler

$$e^{itx} = \cos tx + i\sin tx$$

$$e^{-itx} = \cos tx - i\sin tx,$$

rezultă că

$$I_T = 2\frac{\sin T(u-x)}{u-x}$$

și

$$I = 2\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(u)\frac{\sin T(u-x)}{u-x}\,du.$$

În integrala de mai sus să facem schimbarea de variabilă

$$z = T(u-x);$$

atunci

$$I = 2\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho\left(\frac{z}{T}+x\right)\frac{\sin z}{z}\,dz.$$

Însă

$$\lim_{\alpha \to 0} \rho(x + \alpha) = \rho(x)$$

și trecînd la limită obținem

$$I = 2\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \frac{\sin z}{z} dz = 2\rho(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz;$$

știm însă că

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \pi,$$

de unde rezultă că

$$I = 2\pi\rho(x)$$

și, însfîrșit,

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t)\, dt.$$

3. Șiruri de funcții caracteristice și de repartiție

Fie $\{F_n(x)\}_{0 \leqslant n < \infty}$ un șir de funcții de repartiție și $F(x)$ o funcție de repartiție. Să notăm cu $\varphi_n(t)$ funcția caracteristică a repartiției $F_n(x)$ și cu $\varphi(t)$ funcția caracteristică a repartiției $F(x)$. În cele ce urmează vom demonstra cîteva teoreme privind convergența funcțiilor de repartiție și a funcțiilor caracteristice.

Teoremă. *Dacă în orice punct de continuitate al funcției de repartiție $F(x)$ avem*

$$\lim_{n \to \infty} F_n(a) = F(a)$$

atunci șirul $\{\varphi_n(t)\}_{0 \leqslant n < \infty}$ converge către $\varphi(t)$ uniform în orice interval $[a, b] \subset R$.

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$ și λ un număr real, astfel încît $-\lambda$ și λ să fie puncte de continuitate ale funcției $F(x)$ și în plus

$$F(-\lambda) < \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{și} \quad 1 - F(\lambda) < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Atunci pentru $n > N_1$, cu N_1 convenabil ales, avem

$$F_n(-\lambda) < \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{și} \quad 1 - F_n(\lambda) < \frac{\varepsilon}{8}$$

și deci

$$\left| \int_{-\infty}^{-\lambda} e^{ita}\, dF_n(a) \right| \leqslant \int_{-\infty}^{-\lambda} |e^{ita}|\, dF_n(a) \leqslant F_n(-\lambda) < \frac{\varepsilon}{8}$$

$$\left| \int_{-\infty}^{-\lambda} e^{ita}\, dF(a) \right| < \frac{\varepsilon}{8}$$

și analog

$$\left|\int_{\lambda}^{\infty} e^{ita}\,dF_n(a)\right| \leqslant \int_{\lambda}^{\infty} |e^{ita}|\,dF_n(a) = 1 - F_n(\lambda) < \frac{\varepsilon}{8}\,;\ \left|\int_{\lambda}^{\infty} e^{ita}\,dF(a)\right| < \frac{\varepsilon}{8}\,.$$

Însă

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \left|\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ita}\,dF_n(a) - \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ita}\,dF(a)\right| + \left|\int_{-\infty}^{-\lambda} e^{ita}\,dF_n(a) - \int_{-\infty}^{-\lambda} e^{ita}\,dF(a)\right| + \left|\int_{\lambda}^{\infty} e^{ita}\,dF_n(a) - \int_{\lambda}^{\infty} e^{ita}\,dF(a)\right|$$

și ținînd seama de inegalitățile de mai sus rezultă că

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \left|\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ita}\,dF_n(a) - \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ita}\,dF(a)\right| + 4\frac{\varepsilon}{8}\,.$$

Să luăm o diviziune a intervalului $[-\lambda, \lambda]$, $-\lambda = a_0 < a_1 < \ldots < a_{N+1} = \lambda$ lungimea intervalelor fiind mai mică decît $\frac{\varepsilon}{8T}$. În plus, alegem punctele de diviziune astfel încît să fie puncte de continuitate ale funcției $F(x)$. Atunci

$$\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{ita}\,dF_n(a) - e^{ita_k}\int_{a_k}^{a_{k+1}} dF_n(a)\right| \leqslant |t|(a_{k+1} - a_k)\int_{a_k}^{a_{k+1}} dF_n(a) < \frac{\varepsilon}{8}\int_{a_k}^{a_{k+1}} dF_n(a).$$

Dacă $|t| < T$, avem

$$\left|\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ita}\,dF_n(a) - \sum_{k=0}^{N} e^{ita_k}\int_{a_k}^{a_{k+1}} dF_n(a)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{8}\int_{-\lambda}^{\lambda} dF_n(a) \leqslant \frac{\varepsilon}{8}$$

și

$$\left|\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ita}\,dF(a) - \sum_{k=0}^{N} e^{ita_k}\int_{a_k}^{a_{k+1}} dF(a)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{8}\,.$$

Din ultimele două inegalități rezultă

$$\left|\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ita}\,dF_n(a) - \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ita}\,dF(a)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \left|\sum_{k=0}^{N} e^{ita_k}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} d(F_n(a) - F\,a)\right)\right|.$$

Însă

$$\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} d(F_n(a) - F(a))\right| = |F_n(a_{k+1}) - F_n(a) - F(a_{k+1}) + F(a_k)| = |(F_n(a_{k+1}) - F(a_{k+1})) - (F_n(a_k) - F(a_k))|$$

și deci putem scrie că

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + 2\sum_{k=0}^{N+1} |F_n(a_k) - F(a_k)|.$$

Cum însă punctele a_k sînt puncte de continuitate, pentru orice $\varepsilon > 0$ și $n > N_2$ avem

$$|F_n(a_k) - F(a_k)| < \frac{\varepsilon}{8N} \quad (k = 0,1, \ldots, N+1).$$

Deci, dacă $n \geqslant \sup(N_1, N_2)$, atunci

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon.$$

De unde rezultă că șirul $\{\varphi_n(t)\}_{0 \leqslant n < \infty}$ converge uniform către $\varphi(t)$ în orice interval $[a, b] \subset R$.

Teoremă. *Dacă* $\{\varphi_n(t)\}_{0 \leqslant n < \infty}$ *este un șir de funcții caracteristice corespunzînd șirului de repartiții* $\{F_n(x)\}_{0 \leqslant n < \infty}$ *și dacă*

$$\alpha) \lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t) \text{ pentru orice } t \in R$$

$$\beta) \varphi(t) \text{ este continuă în punctul } t = 0,$$

atunci $\varphi(t)$ *este o funcție caracteristică și șirul* $\{F_n(x)\}_{0 \leqslant n < \infty}$ *converge în orice punct de continuitate al funcției* $F(x)$, *corespunzătoare lui* $\varphi(t)$, *către* $F(x)$.

Demonstrație. Fie $F_n(x)$ funcția de repartiție a lui $\varphi_n(t)$

$$\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_n(x), \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Din teorema lui Helly rezultă că din șirul $\{F_n(x)\}_{0 \leqslant n < \infty}$ se poate extrage un subșir $\{F_{n_p}(x)\}_{0 \leqslant p < \infty}$ care converge, în orice punct de continuitate, către o funcție $F(x)$, monoton nedescrescătoare. Ne rămîne să arătăm, și aceasta este suficient, că

$$F(+\infty) - F(-\infty) = 1.$$

Să presupunem că

$$\int_0^x (F_n(y) - F_n(-y))\, dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos xt}{t^2} \varphi_n(t)\, dt. \tag{1}$$

Această egalitate o vom dovedi după ce vom demonstra teorema. Rezultă că

$$F_n(x) - F_n(-x) \geqslant \frac{1}{\pi x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos xt}{t^2} \varphi_n(t) dt. \ ^{*)}$$

Punînd $xt = u$, obținem

$$F_n(x) - F_n(-x) \geqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos u}{u^2} \varphi_n\left(\frac{u}{x}\right) du.$$

* Inegalitatea rezultă imediat, deoarece

$$(F_n(x) - F_n(-x)) \int_0^x dy \geqslant \int_0^x (F_n(y) - F_n(-y))\, dy.$$

Cum însă x și $-x$ sînt puncte de continuitate, cînd n parcurge șirul $n_j^{(s)}$ avem

$$\lim_{j\to\infty}[F_{n^{(s)}j}(x) - F_{n^{(s)}j}(-x)] = F(x) - F(-x)$$

și deci

$$F(x) - F(-x) \geqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos u}{u^2}\varphi_n\left(\frac{u}{x}\right)du. \qquad (2)$$

Însă $\left|\varphi_n\left(\frac{u}{x}\right)\right|<1$ (din proprietățile funcțiilor caracteristice) și $\lim_{n\to\infty}\varphi_n\left(\frac{u}{x}\right)=$ $=\varphi\left(\frac{u}{x}\right)$ pentru orice u , conform ipotezei.

Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos u}{u^2}\varphi_n\left(\frac{u}{x}\right)du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos u}{u^2}\varphi\left(\frac{u}{x}\right)du.$$

Ținînd seama de (2) avem

$$F(x) - F(-x) \geqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos u}{u^2}\varphi\left(\frac{u}{x}\right)du$$

și deci

$$F(+\infty) - F(-\infty) \geqslant \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos u}{u^2}\varphi\left(\frac{u}{x}\right)du.$$

Deoarece

$$\left|\varphi\left(\frac{u}{x}\right)\right|<1 \;;\; \lim_{x\to\infty}\varphi\left(\frac{u}{x}\right)=1,\; \varphi(0)=1,$$

iar $\varphi(t)$ este continuă în punctul $t=0$, rezultă că

$$F(+\infty) - F(-\infty) \geqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos u}{u^2}du.$$

Însă, după cum vom vedea,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos u}{u^2}du = \pi.$$

În sfîrșit, obținem

$$F(+\infty) - F(-\infty) = 1,$$

deoarece, din proprietățile funcțiilor de repartiție avem

$$F(+\infty) - F(-\infty) \leqslant 1.$$

Pentru a demonstra complet teorema trebuie să arătăm că șirul $\{F_n(x)\}_{0\leqslant n<\infty}$ converge către $F(x)$. (Am arătat acest lucru pentru subșirul

$\{F_{n_p}(x)\}$. Pentru aceasta, ținînd seama că dacă două funcții de repartiție au aceeași funcție caracteristică ele coincid, este suficient să observăm că din orice subșir al șirului $\{F_n(x)\}_{0\leqslant n<\infty}$ putem extrage un subșir convergent și că limita acestui șir este în mod necesar $F(x)$ (funcție de repartiție).

Ne-a rămas să stabilim egalitatea

$$\int_0^x [F_n(y) - F_n(-y)]\, dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos xt}{t^2}\varphi_n(t)\, dt.$$

Pentru aceasta să notăm

$$I = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos xt}{t^2}\varphi_n(t)\, dt.$$

Cum

$$\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}\, dF_n(y),$$

avem

$$I = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos xt}{t^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}\, dF_n(y)\right) dt.$$

Însă

$$\int_{-A}^{A} \frac{1-\cos tx}{t^2}\, dt = 2\int_0^A \frac{1-\cos xt}{t^2}\, dt.$$

Punînd $xt = v$ obținem

$$2\int_0^{Ax} x\,\frac{1-\cos v}{v^2}\, dv = 2x\int_0^{Ax} \frac{1-\cos v}{v^2}\, dv.$$

Integrînd prin părți, notînd $1-\cos v = w$, $\frac{1}{v^2}dv = dz$ obținem

$$2x\int_0^{Ax} \frac{1-\cos v}{v^2}\, dv = 2x\left[-\frac{1-\cos v}{v}\right]_0^{Ax} + 2x\int_0^{Ax} \frac{\sin v}{v}\, dv.$$

Cum însă

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin v}{v}\, dv = \frac{\pi}{2},$$

rezultă că

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos xt}{t^2}\, dt = 2|x|\frac{\pi}{2} = |x|\cdot\pi \qquad (**)$$

sau

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos xt}{t^2}\, dt = |x|.$$

Să observăm acum că

$$I = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos xt}{t^2}\cos yt\,dt + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos xt}{t^2}\sin yt\,dt\right)dF_n(y),$$

iar

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos xt}{t^2}\sin yt\,dt = \int_{-\infty}^{0}\frac{1-\cos xt}{t^2}\sin yt\,dt + \int_{0}^{\infty}\frac{1-\cos xt}{t^2}\sin yt\,dt = 0.$$

Deci

$$I = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos xt}{t^2}\cos yt\,dt\right)dF_n(y).$$

Însă putem scrie imediat (așa cum se constată după un calcul elementar) că

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos xt}{t^2}\cos yt\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1-\cos(x-y)t}{t^2} + \frac{1-\cos(x+y)t}{t^2} - 2\frac{1-\cos yt}{t^2}\right)dt\right]$$

și ținînd seama de (* *)

$$I = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\cos xt)}{t^2}\cos yt\,dt = \frac{1}{2}[|x-y| + |x+y| - 2|y|] = \begin{cases} 0 & \text{dacă } y \leqslant -x \\ x+y & \text{dacă } -x \leqslant y \leqslant 0 \\ x-y & \text{dacă } 0 \leqslant y < x \\ 0 & \text{dacă } x \leqslant y. \end{cases}$$

Atunci avem

$$I = \int_{-x}^{0}(x+y)\,dF_n(y) + \int_{0}^{x}(x-y)\,dF_n(y).$$

Să calculăm fiecare integrală în parte, integrînd prin părți. Avem notînd $(x-y) = u$, $dv = dF_n(y)$

$$\int_{0}^{x}(x-y)\,dF_n(y) = (x-y)\,F_n(y)\Big|_0^x + \int_{0}^{x}F_n(y)\,dy.$$

Analog avem

$$\int_{-x}^{0}(x+y)\,dF_n(y) = (x+y)\,F_n(y)\Big|_{-x}^{0} - \int_{-x}^{0}F_n(y)dy = -\int_{0}^{x}F_n(-y)\,dy$$

și deci

$$I = \int_{0}^{x}(F_n(y) - F_n(-y))\,dy.$$

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Observația 1. Dacă $\varphi(t)$ nu este continuă în punctul $t = 0$, șirul de funcții de repartiție $\{F_n\}_{0 \leqslant n < \infty}$ poate să nu conveargă către o funcție de repartiție F. Să considerăm o variabilă aleatoare ξ care urmează o distribuție uniformă în intervalul $[-n, n]$, atunci funcția sa caracteristică, așa cum am văzut, este

$$\varphi_n(t) = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2int} = \frac{\sin nt}{nt}$$

și

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$$

pentru orice t. Însă $\varphi(t)$ nu este continuă în punctul $t = 0$, deoarece $\varphi(0) = 1$ și $\varphi(t) = 0$ dacă $t \neq 0$.

Și deci $F_n(t)$ nu converge către o funcție de repartiție. Într-adevăr

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(x)\, dx = \int_{-n}^{x} \frac{1}{2n}\, dx = \frac{x + n}{2n}$$

și deci

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = \frac{1}{2}.$$

Observația 2. Dacă nu presupunem că $F_n(x)$ converge către o funcție de repartiție, atunci șirul funcțiilor caracteristice corespunzătoare lui $F(x)$ nu converge în general.

Să considerăm că

$$F_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x-n} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Avem

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = 0$$

și

$$\varphi_n(t) = e^{int - \frac{t^2}{2}},$$

așa cum vom vedea cînd vom studia legea normală. Se observă imediat că $\varphi_n(t)$ nu converge pentru orice t.

4. Teorema lui Bochner

Vom demonstra o teoremă pe care o vom utiliza în problemele pe care le vom studia în capitolele următoare și care stabilește o legătură între funcțiile caracteristice și funcțiile de tip pozitiv.

O funcție continuă, de argument real t, este de *tip pozitiv* în intervalul $-\infty < t < \infty$, dacă oricare ar fi numerele reale $t_1, t_2, \ldots, t_n$ și numerele complexe $C_1, C_2, \ldots, C_n$ și numărul întreg n, avem

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(t_j - t_k)\, C_j \bar{C}_k \geqslant 0,$$

unde $\bar{C}_k$ este conjugatul numărului complex C_k.

Unele proprietăți ale funcțiilor de tip pozitiv sînt date de următoarea

Teoremă. *Dacă f este o funcție de tip pozitiv, atunci*

$(a)\ f(0) \geqslant 0;$

$(b)\ f(-t) = \overline{f(t)};$

$(c)\ |f(t)| \leqslant f(0).$

Demonstrație. a) Să luăm $n = 1$, $t_1 = 0$ și $C_1 = 1$. Atunci

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(t_j - t_k)\, C_j\, \bar{C}_k = f(0) \geqslant 0.$$

b) Să punem $n = 2$, $t_1 = 0$, $t_2 = t$ și C_1 și C_2 oarecare. Avem

$$(*)\quad 0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(t_j - t_k)\, C_j\, \bar{C}_k = f(0-0)\, C_1\, \bar{C}_1 + f(0-t)\, C_1\, \bar{C}_2 +$$

$$+ f(t-0)\, C_2\, \bar{C}_1 + f(t-t)\, C_2\, \bar{C}_2 = f(0)\,(|C_1|^2 + |C_2|^2) +$$

$$+ f(-t)\, C_1\, \bar{C}_2 + f(t)\, \bar{C}_1 C_2.$$

Urmează că partea imaginară din membrul drept al egalității de mai sus, trebuie să fie nulă; să notăm

$$f(-t) = \alpha_1 + i\,\beta_1, \qquad C_1\,\bar{C}_2 = \gamma + i\,\delta,$$

$$f(t) = \alpha_2 + i\,\beta_2, \qquad \bar{C}_1\, C_2 = \gamma - i\,\delta.$$

Atunci trebuie să avem:

$$\alpha_1\,\delta + \beta_1\,\gamma - \alpha_2\,\delta + \beta_2\,\gamma = 0.$$

Întrucît C_1 și C_2 sînt două numere complexe oarecare, rezultă că γ și δ sînt oarecare și deci că

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0; \qquad \beta_1 + \beta_2 = 0,$$

adică

$$f(t) = \overline{f(-t)}.$$

c) În relația (*) să punem $C_1 = f(t)$ și $C_2 = -|f(t)|$. Atunci obținem

$$2\,f(0)\,|f(t)|^2 - |f(t)|^2\,|f(t)| - |f(t)|^2 \cdot |f(t)|.$$

De unde pentru $|f(t)| \neq 0$ rezultă că

$$f(0) \geqslant |f(t)|.$$

Dacă $|f(t)| = 0$, atunci în baza proprietății (a) avem

$$f(0) \geqslant |f(t)|.$$

Vom demonstra acum

Teorema lui Bochner. *Funcțiile caracteristice sînt funcții de tip pozitiv și, reciproc, orice funcție de tip pozitiv este de forma a* $\varphi(t)$, *unde* $\varphi(t)$ *este o funcție caracteristică.*

Demonstrație. Vom demonstra mai întîi prima parte. Dacă

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x)$$

și dacă se dau m (număr finit) numere reale $t_1, t_2, \ldots, t_m$ și m numere complexe $c_1, c_2, \ldots, c_m$, avem

$$\sum_{j,k=1}^{m} C_j \bar{C}_k \varphi(t_j - t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^{m} C_j \bar{C}_k e^{i(t_j - t_k)x}\, dF(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{m} \bar{C}_j e^{it_j x} \right|^2 dF(x) \geqslant 0.$$

Pentru a demonstra a doua parte a teoremei vom urma procedeul lui M. Loève.

Fie

$$f(x, \alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \int_0^{\alpha} \varphi(u - v)\, e^{-iux} e^{ivx}\, du\, dv \tag{1}$$

o funcție determinată pentru orice valoare finită a lui α. Această funcție este de tip pozitiv.

Într-adevăr, ținînd seama de definiția integralei Riemann, avem

$$f(x, \alpha) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\alpha} \sum_{i,j} \varphi(u_i - u_j)\, e^{-iu_i x} e^{iu_j x} \delta^2,$$

unde $\delta = u_{i+1} - u_i$. Însă din ipoteza teoremei rezultă că expresiile de sub semnul limită sînt de tip pozitiv. Deci

$$f(x, \alpha) \geqslant 0.$$

În integrala (1) să facem schimbarea de variabilă $u = v + w$ și să integrăm în raport cu v. Obținem

$$f(x, \alpha) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[1 - \frac{|w|}{\alpha}\right] e^{-iwx} \varphi(w)\, dw$$

sau

$$f(x, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(w, \alpha)\, e^{-iwx}\, dw \tag{2}$$

dacă notăm

$$\varphi(w, \alpha) = \varphi(w)\left(1 - \frac{|w|}{\alpha}\right), \qquad \text{dacă } |w| \leqslant \alpha$$

$$\varphi(w, \alpha) = 0, \qquad \text{dacă } |w| > \alpha.$$

Funcția $\varphi(w,\alpha)$ este continuă, mărginită și sumabilă pe întreaga axă reală.

Însă transformata Fourier a funcției continue

$$h(x) = 1 - |x|, \qquad \text{dacă } |x| \leqslant 1$$

$$h(x) = 0, \qquad \text{dacă } |x| > 1$$

este

$$H(t) = \frac{1 - \cos t}{\pi t^2},$$

care este o funcție sumabilă pe întreaga axă reală.

Atunci funcția

$$\psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} cH(ct)\, \varphi(\tau - t, \alpha)\, dt$$

este continuă pe întreaga axă reală.

Însă

$$\psi(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau - t, \alpha)\, dt \int_{-c}^{c} \left(1 - \frac{|x|}{c}\right) e^{-itx}\, dx.$$

Întrucît avem numai funcții integrabile, putem schimba ordinea de integrare și obținem

$$\psi(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c} \left(1 - \frac{|x|}{c}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau - t, \alpha)\, e^{-itx}\, dt\, dx$$

sau ținînd seamă de definiția funcției $f(x, \alpha)$,

$$\psi(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c} \left(1 - \frac{|x|}{c}\right) e^{i\tau x} f(x, \alpha)\, dx.$$

Rezultă

$$\psi(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c} \left(1 - \frac{|x|}{c}\right) f(x, \alpha)\, dx.$$

Însă $\psi(0) \to \varphi(0)$, dacă $\varphi(0)$ este continuă în origine. Cu alte cuvinte

$$\lim_{c\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c} \left(1 - \frac{|x|}{c}\right) f(x, \alpha)\, dx = \varphi(0).$$

Cum $f(x, \alpha)$ este nenegativă, avem

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} f(x,\alpha)\,dx < 2\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \left(1 - \frac{|x|}{c}\right) f(x, \alpha)\,dx < 2\int_{-c}^{c} \left(1 - \frac{|x|}{c}\right) f(x, \alpha)\,dx,$$

de unde rezultă că $f(x,\alpha)$ este integrabilă.

Atunci în (2) putem face inversiunea și avem

$$\varphi(w, \alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} f(x, \alpha)\,dx.$$

Deci $\varphi(w, \alpha)$ este funcție caracteristică. Dacă $\alpha \to 0$ și $\varphi(w, \alpha)$ tinde uniform către $\varphi(w)$ [după cum se verifică imediat pe (1)] și această limită va fi o funcție caracteristică. Cu aceasta teorema este demonstrată.

5. Funcții caracteristice n-dimensionale

Dacă $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o funcție de repartiție cu n variabile, vom numi funcție caracteristică a repartiției $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funcția $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ definită pe R prin egalitatea:

$$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n) = M\left(e^{i(t_1 f_1 + t_2 f_2 + \ldots + t_n f_n)}\right)$$

sau

$$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n)}\,dF(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Dacă $n = 1$, regăsim funcția caracteristică definită la începutul acestui capitol. Este ușor de văzut că funcția caracteristică a unei repartiții cu n variabile are proprietăți analoge cu funcția caracteristică unidimensională, și anume:

1) $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ este uniform continuă.

2) $|\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)| \leqslant \varphi(0,0, \ldots, 0) = 1.$

3) Dacă $g_j = \sum_{k=1}^{n} C_{jk} f_k + b_j$, unde f_k sînt variabile aleatoare și $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ este o variabilă aleatoare cu n dimensiuni, atunci funcția caracteristică a acestei variabile este

$$\varphi_g(t_1, t_2, \ldots, t^u) = e^{i\sum_{j=1}^{n} c_{jk} t_j}\,\varphi_f(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

unde $\varphi_f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ este funcția caracteristică a variabilei $f = f_1, f_2, \ldots, f_n)$, iar

$$u_k = \sum_{j=1}^{n} C_{jk} t_j \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

4) Dacă $\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este densitatea de repartiție corespunzătoare $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, atunci

$$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n)} \rho(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1, \ldots, dx_n$$

$$5) \left(\frac{\partial \varphi(t_1, \ldots, t_n)}{\partial t_k}\right)_{t_1 = t_2 \ldots = t_n = 0} = i\, M(f_k).$$

$$6) \left(\frac{\partial^2 \varphi(t_1, \ldots, t_n)}{\partial t_j\, \partial t_k}\right)_{t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 0} = -M(f_j f_k)$$

și celelalte proprietăți stabilite pentru $\varphi(t)$ se pot extinde și pentru o funcție caracteristică a unei funcții de repartiție cu n variabile.

6. Funcție generatoare

Funcția generatoare a fost utilizată începînd de la Laplace, înainte de a se întrebuința funcția caracteristică. Spre deosebire de funcția caracteristică, funcția generatoare nu este mărginită, însă este utilă, mai ales pentru calculul momentelor.

În cele ce urmează, ne vom ocupa numai de acele variabile aleatoare care iau valori întregi și nenegative.

Să notăm cu $P(\xi = k) = p_k$ probabilitatea ca variabila aleatoare ξ să ia valoarea k. Vom numi funcția generatoare a variabilei aleatoare ξ, o funcție $G_\xi(z)$ [cînd nu va fi ambiguitate o vom nota cu $G(z)$] cu valori complexe, care dezvoltată în serie de puteri are coeficientul lui z^k egal cu p_k, adică

$$G_\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k,$$

unde z este un număr complex și $|z| \leqslant 1$.

Din această definiție rezultă imediat legătura strînsă dintre funcția generatoare și cea caracteristică, și anume:

$$\varphi_\xi(t) = G_\xi(e^{it}).$$

Tot din definiție se observă că funcția generatoare determină în mod univoc repartiția unei variabile aleatoare ξ. Într-adevăr, avem

$$p_0 = G_\xi(0),\ p_k = \frac{G_\xi^{(k)}(0)}{k!} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

unde $G_\xi^{(k)}(z)$ este derivata funcției generatoare de ordinul k.

Să dăm cîteva exemple:

1) dacă variabila aleatoare ξ urmează distribuția binomială cu valoarea medie np, atunci funcția generatoare este dată de

$$G_\xi(z) = (1 + p(z-1))^n;$$

2) dacă variabila aleatoare ξ urmează repartiția Poisson* λ fiind valoarea medie, atunci

$$G_\xi(z) = e^{\lambda(z-1)}.$$

Fără a insista, vom arăta cum poate fi utilizată funcția generatoare pentru calculul momentelor, al cumulanților și în același timp pentru formulele de transformare ale momentelor și comulanților.

Pentru aceasta vom calcula derivatele funcției generatoare în punctul $z = 1$. Să precizăm însă un fapt. Am văzut că funcția generatoare este definită numai pentru $|z| \leqslant 1$, deci derivatele în punctul $z = 1$, dacă există, le vom lua ca derivate la stînga. Avem deci

$$\begin{cases} G'_\xi(1) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\, p_k \\ G''_\xi(1) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, p_k \\ \vdots & \\ G^{(s)}_\xi(1) &= \sum_{k=s}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-s+1)\, p_k. \end{cases} \tag{1}$$

Notînd cu M_s momentul de ordinul s, avem

$$M_0 = 1,\ M(\xi^s) = M_s = \sum_{k=1}^{\infty} k^s\, p_k \quad (s = 1, 2, \ldots)$$

și, ținînd seama de (1) rezultă că

$$\begin{aligned} G_\xi(1) &= M_0 = 1 \\ G'_\xi(1) &= M_1 = M(\xi) \\ G''_\xi(1) &= M_2 - M_1 \\ G'''_\xi(1) &= M_3 - 3M_2 + 2M_1 \\ G^{IV}_\xi(1) &= M_4 - 6M_3 + 11(M_2 - 6M_1 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2}$$

sau

$$\begin{aligned} M_1 &= G'_\xi(1) \\ M_2 &= G''_\xi(1) + G'_\xi(1) \\ M_3 &= G'''_\xi(1) + 3G''_\xi(1) + G'_\xi(1) \\ M_4 &= G^{IV}_\xi(1) + 6G'''_\xi(1) + 7G''_\xi(1) + G'_\xi(1). \end{aligned} \tag{3}$$

* v. repartiția Poisson la pag. 305—306.

Cu ajutorul relațiilor (3) se obțin cu ușurință momentele centrate, definite prin:

$$m_s = M\,[(\xi - M(\xi))^s] \qquad (s = 2, 3, \ldots).$$

Această cale o vom utiliza numai pentru valori mici ale lui s.

Din definiția momentelor centrate avem:

$$m_s = \sum_{r=0}^{s} C_s^r (-1)^r M_{s-r} M_1^r$$

și deci

$$m_2 = M_2 - M_1^2 = G_\xi''(1) + G_\xi'(1) - (G_\xi'(1))^2$$

$$m_3 = M_3 - 3M_2M_1 + 2M_1^3 =$$

$$= G_\xi'''(1) + 3G_\xi''(1) + G_\xi'(1) - 3G_\xi''(1)\,G_\xi'(1) - 3(G_\xi'(1))^2 + 2(G_\xi'(1))^3.$$

Din (4) rezultă imediat valoarea dispersiei, deoarece $m_2 = D^2(\xi)$, sau

$$D^2(\xi) = G_\xi''(1) + G_\xi'(1) - G_\xi'(1)^2.$$

Pentru calculul momentelor centrate de ordin superior vom proceda în felul următor. Fie $z = e^w$. Să dezvoltăm în serie de puteri funcția $G_\xi(e^w)$. Știm că $G_\xi(z)$ este desfășurabilă în serie de puteri, în punctul $z = 1$, dacă funcția este regulată în acest punct. Dacă $|w| \leqslant r < 1$, atunci $|e^w - 1| \leqslant \leqslant \frac{r}{1-r}$, deci dacă r este destul de mic, funcția $G_\xi(e^w)$ este regulată, pentru $|w| \leqslant r$. Deoarece

$$G_\xi(e^w) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k e^{wk} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{k^s w^s}{s!}\right) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{w^s}{s!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k k^s\right)$$

sau

$$H_\xi(w) = G_\xi(e^w) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{M_s}{s!} w^s,$$

deoarece $M_s = \sum_{k=0}^{\infty} p_k k^s$.

Funcția $H_\xi(w)$ mai poartă numele de funcție generatoare de momente.

Momentele centrate se calculează utilizînd funcția

$$L_\xi(w) = e^{-wM_1} H_\xi(w).$$

Într-adevăr,

$$L_\xi(w) = \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r M_1^r w^r}{r!}\right)\left(\sum_{r=s}^{\infty} \frac{M_s}{s!} w^s\right) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{w^s}{s!} \left(\sum_{r=0}^{s} C_s^r (-1)^r M_1^r M_{s-r}\right),$$

deci

$$L_\xi(w) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{m_s\, k^s}{s!}.$$

Această funcție se mai numește și funcția generală a momentelor centrate.

Trebuie să ne imaginăm însă că funcția $H_\xi(w)$ este regulată în punctul $z = 1$. O condiție necesară și suficientă ca să existe toate momentele unei variabile aleatoare ξ este ca

$$\lim_{s\to\infty} \sup \sqrt[s]{\frac{H_s}{s!}}$$

să fie finită. Dacă variabila ξ este mărginită, această condiție este îndeplinită.

Să observăm acum că pentru $w = 0$, $H_s(w) = 1$ și că dacă $H_s(w)$ în $w = 0$ este regulată, atunci se poate determina $|w| \leqslant r$, pentru care $H_s(w) \neq 0$. În acest caz $K_\xi(w) = \log H_\xi(w)$ este o funcție regulată pentru $|w| \leqslant r$. Deoarece $K_\xi(0) = \log H_\xi(0) = \log 1 = 0$, putem scrie:

$$K_\xi(w) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{K_r\, w^r}{r!}.$$

K_r poartă numele de cumulant de ordinul r, iar $K_\xi(w)$ se numește funcția generală pentru cumulanți. Între cumulanți și momentele centrate se observă imediat că au loc următoarele egalități:

$$K_1 = m_1$$
$$K_2 = m_2$$
$$K_3 = m_3$$
$$K_4 = m_4 - 3m_2^2.$$
$$\vdots$$

Aplicație. Să calculăm cumulanții distribuției Poisson. Avem:

$$G_\xi(z) = e^{\lambda(z-1)}$$

și

$$H_\xi(w) = e^{(e^w-1)}$$

deci

$$L_\xi(w) = e^{(e^w-1-w)}$$

și

$$K_\xi(w) = \lambda(e^w - 1) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda}{r!} w^r.$$

De aici rezultă că

$$K_r(\xi) = \lambda \qquad (r = 1, 2, \ldots,).$$

În cele ce urmează vom enunța și demonstra cîteva teoreme privind funcția generatoare, și numai acele teoreme pe care le vom utiliza pentru demonstrarea unei legi limită.

Teorema 1. *Dacă ξ și η sînt două variabile aleatoare independente, cu funcțiile generatoare $G_\xi(z)$ și $G_\eta(z)$, atunci funcția generatoare a variabilei $z = \xi + \eta$ este egală cu produsul funcțiilor generatoare de variabile ξ, respectiv η. Sau*

$$G_{\xi+\eta}(z) = G_\xi(z) \cdot G_\eta(z).$$

Demonstrație. Fie $P(\xi = k) = p_k$ și $P(\eta = k) = q_k$,

iar

$P(\xi + \eta = k) = r_k$ pentru $k = 0,1, 2, \ldots$ Atunci avem

$$r_k = \sum_{s=0}^{k} p_s\, q_{k-s}.$$

Ținînd seama de definiția funcției generatoare rezultă că

$$G_{\xi+\eta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left(\sum_{s=0}^{k} p_s q_{k-s} \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k\, z^k \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} q_j z_j \right)$$

sau

$$G_{\xi+\eta}(z) = G_\xi(z) \cdot G_\eta(z).$$

Această teoremă este analogă cu teorema corespunzătoare pentru funcțiile caracteristice:

$$f_{\xi+\eta}(t) = f_\xi(t)\, f_\eta(t).$$

O b s e r v a ț i e. $G_{\xi+\eta}(z) = G_\xi(z)\, G_\eta(z)$ nu implică faptul că variabilele aleatoare ξ și η sînt independente.

Vom arăta acest lucru pe un exemplu. Fie o urnă cu nouă bile, pe fiecare fiind înscris un număr după cum urmează:

1 bilă are marcată numărul 33
2 bile au marcate numărul 34
1 bilă are marcat numărul 44
2 bile au marcate numărul 45
2 bile au marcate numărul 53
1 bilă are marcat numărul 55.

Probabilitatea ca să extragem o bilă oarecare este $p = \frac{1}{9}$. Fie acum ξ evenimentul, care constă în faptul că se realizează primul număr de pe o

bilă oarecare, iar η ca să se realizeze cel de-al doilea număr. Se observă imediat că $P(\xi = k) = P(\eta = k) = \frac{1}{3}$ $(k = 3, 4, 5)$ și deci

$$G_\xi(z) = G_\eta(z) = \frac{z^3 + z^4 + z^5}{3}.$$

Însă, pentru a calcula $G_\xi(z)$ să observăm că variabila se realizează în felul următor:

1 bilă cu 6
2 bile cu 7
3 bile cu 8
2 bile cu 9
1 bilă cu 10

și deci

$$G_{\xi+\eta}(z) = \frac{z^6 + 2z^7 + 3z^8 + 2z^9 + z^{10}}{9} = \left(\frac{z^3 + z^4 + z^5}{3}\right)^2.$$

Rezultă că

$$G_{\xi+\eta}(z) = G_\xi(z) \cdot G_\eta(z).$$

Totuși, variabilele ξ și η nu sînt independente.
Într-adevăr,

$$P(\xi = 4, \eta = 3) = 0 \neq P(\xi = 4)\, P(\eta = 3) = \frac{1}{9}.$$

Vom demonstra acum două teoreme referitoare la convergența șirurilor de funcții generatoare.

Teorema 2. *Fie* $\{\xi_n\}_{1 \leqslant n \leqslant \infty}$ *un șir de variabile aleatoare, care iau valori întregi nenegative, cu proprietatea că distribuțiile corespunzătoare converg. Să notăm*

$$(a) \quad p_{nk} = P(\xi_n = k) \qquad (k = 0,1,2, \ldots; n = 1,2,\ldots)$$

și

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk} z^k$$

și

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k.$$

Dacă

$$(b) \quad \lim_{n \to \infty} p_{nk} = p_k \qquad (k = 0,1,2, \ldots)$$

$$(c) \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1,$$

atunci

$$(d) \quad \lim_{n\to\infty} G_n(z) = G(z)$$

pentru $|z| \leqslant 1$.

Dacă condiția (a) este îndeplinită, însă condiția (b) nu este verificată, atunci (d) este valabilă numai pentru $|z| < 1$.

Demonstrație. Vom arăta mai întîi că teorema este adevărată pentru $|z| < 1$, deci pentru orice punct interior cercului de rază egală cu unitatea. Din definiția funcției generatoare rezultă:

$$|G_n(z) - G(z)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} (p_{nk} - p_k) z^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} |p_{nk} - p_k| + |z|^N \left(\sum_{k=N}^{\infty} (p_{nk} + p_k)\right).$$

Fiind dat $\varepsilon > 0$, putem alege un N astfel încît

$$|z|^N < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Atunci

$$|G_n(z) - G(z)| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} |p_{nk} - p_k| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

O dată N determinat, să alegem pe n astfel încît

$$|p_{nk} - p_k| < \frac{\varepsilon}{2N} \qquad (k = 0,1, \ldots, N-1).$$

Rezultă că

$$|G_n(z) - G(z)| \leqslant N\frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Deci teorema este adevărată pentru $|z| < 1$.

Pînă acum nu am utilizat condiția (c)

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Fie $|z| = 1$. Atunci avem

$$|G_n(z) - G(z)| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} |p_{nk} - p_k| + \sum_{k=N}^{\infty} (p_{nk} - p_k).$$

Deoarece seria $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$ este convergentă, putem alege un N astfel încît

$$\sum_{k=N}^{\infty} p_k < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte se vede că

$$\sum_{k=N}^{\infty} p_{nk} = 1 - \sum_{k=0}^{N-1} p_{nk}, \qquad (*)$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=N}^{\infty} p_{nk} = 1 - \sum_{k=0}^{N-1} p_k$$

și ținînd seama de (*), avem

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=N}^{\infty} p_{nk} = \sum_{k=N}^{\infty} p_k.$$

Mai sus am ales pe N. Acum pentru $n > n_1$ avem

$$\left| \sum_{k=N}^{\infty} p_{nk} - \sum_{k=N}^{\infty} p_k \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Din inegalitățile de mai sus rezultă că

$$\sum_{k=N}^{\infty} p_{nk} \leqslant \left| \sum_{k=N}^{\infty} p_{nk} - \sum_{k=N}^{\infty} p_k \right| + \sum_{k=N}^{\infty} p_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dacă $n > n_2$, atunci

$$|p_{nk} - p_k| < \frac{\varepsilon}{4N} \qquad (k = 0,1, \ldots, N-1).$$

Acum, luînd $n > \max(n_1, n_2)$, rezultă

$$|G_n(z) - G(z)| < N\frac{\varepsilon}{4N} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Deci, dacă condiția (c) este îndeplinită, atunci teorema este adevărată.
Și cu aceasta teorema este complet demonstrată.

O b s e r v a ț i e. Să considerăm următorul exemplu. Fie $\xi_n \equiv n$, deci

$$p_{nk} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } n = k \\ 0 \text{ dacă } n \neq k, \end{cases}$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} p_{nk} = 0$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} G_n(z) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } |z| < 1 \\ 1 \text{ dacă } |z| = 1 \\ \text{nu există, dacă } z = e^{i\theta}\ (0 < \theta < 2\pi). \end{cases}$$

Deci, dacă condiția (b) nu este verificată, teorema nu este adevărată.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 3. *Fie* $\{\xi_n\}_{1\leqslant n<\infty}$ *un șir de variabile aleatoare, care iau valori întregi nenegative. Să notăm*

$$P(\xi_n = k) = p_{nk} \qquad (k = 0,1,2, \ldots, n = 1, 2\ldots)$$

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}\, z^k$$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, z^k.$$

Dacă

$$\lim_{n\to\infty} G_n(z) = G(z)$$

pentru $|z| \leqslant 1$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} p_{nk} = p_k \qquad (k = 0,1, \ldots)$$

și

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Demonstrație. Vom demonstra prin inducție că $\lim_{n\to\infty} p_{nk} = p_k$, pentru orice k.

$$p_{n0} = G_n(0)$$

și

$$\lim G_{n0} = G(0);$$

acum există

$$\lim_{n\to\infty} p_{n0} = p_0,$$

întrucît am văzut că $p_0 = G(0)$.

Să presupunem acum că

$$\lim_{n\to\infty} p_{nk} = p_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, r-1).$$

Să arătăm că

$$\lim_{n\to\infty} p_{nr} = p_r.$$

Fie

$$G_n^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} p_{nk}\, z^{k-r} = z^{-r}\left[G_n(z) - \sum_{k=0}^{r-1} p_{nk}\, z^k\right]$$

și

$$G^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} p_k\, z^{k-r} = z^{-r}\left[G(z) - \sum_{k=0}^{r-1} p_k\, z^k\right].$$

Din condițiile teoremei rezultă că dacă $|z| \leqslant 1$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} G_n(z) = G(z)$$

și

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{r-1} p_{nk} z^k = \sum_{k=0}^{r-1} p_k z^k,$$

deci dacă $|z| \leqslant 1$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} G_n^{(r)}(z) = G^{(r)}(z).$$

Să observăm însă că

$$p_{nr} - p_r = G_n^{(r)}(z) - G^{(r)}(z) - z \sum_{k=r+1}^{\infty} (p_{nk} - p_k)\, z^{k-r-1}$$

și, deci, luînd în considerare că $|p_{nk} - p_k| \leqslant 1$, obținem

$$|p_{nr} - p_r| \leqslant |G_n^{(r)}(z) - G^{(r)}(z)| + \frac{z}{1+|z|}.$$

Să alegem acum pe $z \neq 0$ astfel încît $\frac{z}{1-|z|} < \frac{\varepsilon}{2}$, și apoi pe n_0 astfel încît pentru $n > n_0$ să avem

$$|G_n^{(r)}(z) - G^{(r)}(z)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

atunci

$$|p_{nr} - p_r| < \varepsilon$$

dacă $n > n_0$.

Așadar, am arătat că

$$\lim_{n\to\infty} p_{nk} = p_k$$

pentru orice k.

Ne mai rămîne să arătăm că

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Pentru aceasta să observăm că pentru $z = 1$ din faptul că

$$\lim_{n\to\infty} G_n(z) = G(z) \text{ pentru } |z| \leqslant 1$$

rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} p_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k.$$

Dar

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{nk} = 1$$

și deci trebuie ca și

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Cu aceasta teorema este demonstrată.

Să observăm că această teoremă poate fi enunțată, evident, și în felul următor:

Teorema 4. *Fie* $(\xi_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *un șir de variabile aleatoare care iau valori întregi negative. Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} G_n(z) = G(z),$$

atunci șirul de funcții de repartiții corespunzătoare variabilei ξ_n *converge către o funcție de repartiție a cărei funcție generatoare este* $G(z)$.

Observație. Dacă presupunem că

$$\lim_{n\to\infty} G_n(z) = G(z)$$

pentru $|z| < 1$, nu rezultă că $G(z)$ este funcția generatoare.

Vom arăta aceasta pe un exemplu simplu. Fie ξ_n o variabilă aleatoare care ia valorile 0 și n cu probabilitățile $\frac{1}{2}$.

Atunci

$$G_n(z) = \frac{1+z^n}{2}$$

și dacă $|z| < 1$ avem

$$\lim_{n\to\infty} G_n(z) = \frac{1}{2}.$$

Să observăm însă că $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \frac{1}{2} \neq 1$, deci condiția (c) nu este îndeplinită.

§ 3. Repartiția normală

1. Repartiția normală unidimensională

Una din legile de repartiție cu cea mai mare importanță în calculul probabilităților și statistică este legea de repartiție normală.

Numim densitate de repartiție normală, densitatea dată de egalitatea:

$$\varphi(x; a,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

a și σ fiind constante — (parametrii repartiției). Graficul corespunzător acestei densități este (fig. 5).

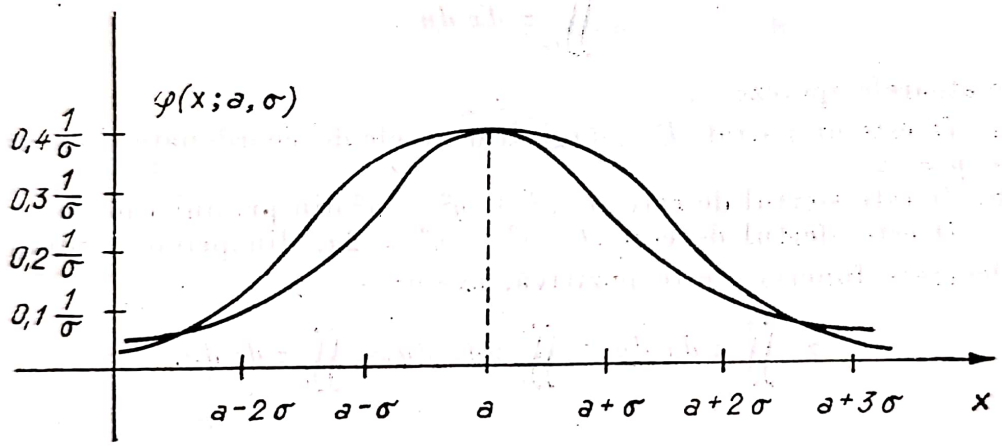

Fig. 5

Funcția de repartiție a legii normale este, prin definiție,

$$F(x; a, \sigma) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x; a, \sigma)\, dx.$$

Se verifică imediat că $F(x; a, \sigma)$ este o funcție de repartiție. Vom arăta numai că

$$\lim_{x\to\infty} F(x; a, \sigma) = 1$$

sau

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

Să facem substituția $\frac{x-a}{\sigma} = t$, $dx = \sigma\, dt$.

Avem

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\sigma\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Să arătăm că ultima integrală este egală cu 1, sau că

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{2}$$

Pentru a stabili egalitatea de mai sus să considerăm funcția auxiliară

$$z(x,\,y) = \frac{1}{2\pi}\,e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}$$

și să calculăm integrala

$$\iint_D z\;dx\;dy$$

în următoarele ipoteze:

(a) D este un pătrat (P) mărginit de axele de coordonate și de dreptele $x = a$, $y = a$.

(b) D este sfertul de cerc (c) $x^2 + y^2 = a^2$ din primul cadran.

(c) D este sfertul de cerc (C) $x^2 + y^2 = 2a$, din primul cadran.

Deoarece funcția z este pozitivă, avem:

$$(\alpha)\qquad \iint_c z\,dx\,dy \leqslant \iint_P z\,dx\,dy \leqslant \iint_C z\,dz\,dy.$$

Însă

$$\iint_P \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi}\,dx\,dy = \int_0^a \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx\int_0^a \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dy = \Phi(a)\,\Phi(a) = [\Phi(a)]^2$$

unde am notat

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy.$$

Pentru a calcula aceeași integrală pe cercurile (C) și (c) să trecem la coordonate polare:

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

și avem

$$\iint_c z\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^a \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{2\pi}\,r\,dr = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^a d\left(e^{-\frac{r^2}{2}}\right) = \frac{1}{4}\left[e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^a = \frac{1}{4}\left(1 - e^{-\frac{a^2}{2}}\right).$$

Analog vom avea

$$\iint_C z\,dx\,dy = \frac{1}{4}(1 - e^{-a^2}).$$

Ținînd seama de (α) rezultă că

$$\frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{a^2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} < \Phi(a) < \frac{1}{2}(1 - e^{-a^2})^{\frac{1}{2}}.$$

De unde rezultă că

$$\lim_{a\to\infty} \Phi(a) = \lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt = \frac{1}{2}$$

și deci

$$F(+\infty) = 1.$$

Să calculăm valoarea medie și dispersia acestei legi. Avem:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi(x; a, \sigma)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Să facem substituția

$$\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} = t, \qquad dx = \sigma\sqrt{2}\,dt$$

și

$$M(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma\sqrt{2}\,t + a)\,e^{-t^2}\,dt = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2}\,dt + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt =$$

$$= \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

Însă

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

și deci

$$M(x) = a.$$

Deci a este valoarea medie a legii normale.

Pentru dispersie avem

$$D(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

sau, făcînd aceeași substituție ca mai sus,

$$D(x) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2\,e^{-t^2}\,dt.$$

Integrînd prin părți obținem

$$D(x) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left\{-t\, e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt\right\} = \sigma^2.$$

Să calculăm momentele centrate ale legii normale. Avem:

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^s\, \varphi(x; a, \sigma)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^s\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx.$$

Făcînd substituția

$$\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}} = t$$

obținem

$$\mu_s = \frac{(\sigma\sqrt{2})^s}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^s\, e^{-t^2}\, dt \tag{1}$$

care se mai poate scrie:

$$\mu_s = \frac{(\sigma\sqrt{2})^s}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{s-1}\, t\, e^{-t^2}\, dt.$$

Integrînd prin părți

$$u = t^{s-1}, \quad du = (s-1)\, t^{s-2}\, dt$$

$$dv = te^{-t^2}\, dt, \quad v = \int \frac{1}{2}\, d(-e^{-t^2})\, dt = -\frac{1}{2}\, e^{-t^2}$$

și deci

$$\mu_s = \frac{(\sigma\sqrt{2})^s}{\sqrt{\pi}}\left\{-\frac{1}{2}\, e^{-t^2}\, t^{s-1}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{s-1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} t^{s-2}\, e^{-t^2}\, dt\right\}$$

sau

$$\mu_s = \frac{(s-1)\,(\sigma\sqrt{2})^s}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{s-2}\, e^{-t^2}\, dt.$$

Însă ținînd seama de (1) rezultă că

$$\mu_{s-2} = \frac{(\sigma\sqrt{2})^{s-2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{s-2}\, e^{-t^2}\, dt$$

și deci

$$\mu_s = (s-1)\, \sigma^2 \cdot \mu_{s-2}. \tag{2}$$

Din relația (2) avem

$$\mu_0 = 1$$
$$\mu_1 = 0$$
$$\mu_2 = \sigma^2$$
$$\mu_4 = 3\sigma^4$$
$$\mu_6 = 15\sigma^6$$

În general vom avea

$$\mu_s = (s-1)\,!!\,\sigma^s,$$

unde cu $(s-1)\,!!$ am notat produsul numerelor impare de la 1 la $s-1$.

Să presupunem că variabila aleatoare X urmează legea normală. Să determinăm probabilitatea ca X să fie cuprinsă între α și β ($\alpha < \beta$ două numere reale). Avem

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_\alpha^\beta \varphi(x; a, \sigma)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Făcînd substituția

$$\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}} = t,$$

obținem

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}}^{\frac{\beta-\alpha}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt. \tag{3}$$

Utilizînd funcția lui Laplace

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

care este calculată în tabele, expresia (3) poate fi scrisă

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right).$$

Se observă imediat că funcția lui Laplace are următoarele proprietăți:

$$1^\circ\ \Phi(0) = 0;$$
$$2^\circ\ \Phi(\infty) = 1;$$

Aceasta rezultă din $\Phi(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$;

3° este o funcție impară $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Într-adevăr.

$$\Phi(-x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-x} e^{-t^2}\, dt;$$

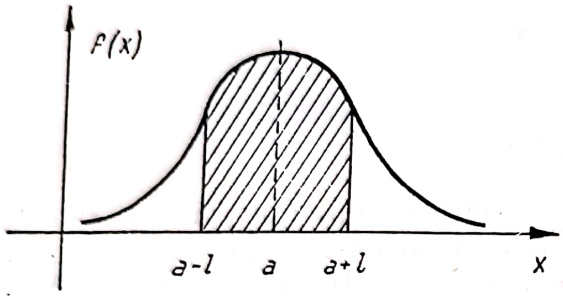

Fig. 6

punînd $t = -u$ obținem

$$\Phi(-x) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} e^{-u^2}\, du = -\Phi(x).$$

În practică, ne interesează

$$P(|x - a| < l);$$

iar grafic (fig. 6).

Avem

$$P(m - l < x < m + l) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(-\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right].$$

de unde rezultă că

$$P(|x - a| < l) = \Phi\left(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right).$$

Vom determina funcția caracteristică a repartiției normale. Prin definiție avem:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, \rho(x)\, dx,$$

unde

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

deci

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx.$$

Să notăm:

$$z = \frac{x - a}{\sigma} - it\sigma,\ \sigma dz = dx,$$

iar

$$z^2 = \left(\frac{x - a}{\sigma}\right)^2 - t^2\sigma^2 - 2i(x - a)\, t = \left(\frac{x - a}{\sigma}\right)^2 - 2itx + 2iat - t^2\sigma^2$$

și

$$\frac{z^2}{2} = \frac{(x - a)^2}{2\sigma^2} - itx + iat - \frac{t^2\sigma^2}{2}$$

și avem

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iat - \frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = e^{iat - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

deoarece

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}.$$

Deci

$$\varphi(t) = e^{iat - \frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

Acum putem calcula momentele de diverse ordine, folosind funcția caracteristică. Avem:

$$M_1 = \frac{(\varphi'(t))_{t=0}}{i}.$$

$$M_2 = \frac{(\varphi''(t))_{t=0}}{i^2}.$$

Însă

$$\varphi'(t) = (ia - t\sigma^2)\, e^{iat - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

de unde $\varphi'(0) = ia$,

$$\varphi''(t) = (ia - t\sigma^2)^2\, e^{iat - \frac{t^2\sigma^2}{2}} - \sigma^2 e^{iat - \frac{t^2a^2}{2}}; \quad \varphi''(0) = ia^2 - \sigma^2.$$

Deci

$$M_1 = a$$

$$M_2 = \sigma^2 + a^2, \text{ iar } D^2(x) = M_2 - M_1^2 = \sigma^2 + a^2 - a^2 = \sigma^2.$$

2. Repartiția normală bidimensională

Densitatea de repartiție a legii normale cu două dimensiuni este dată de

$$\rho(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]}.$$

Această lege depinde de parametrii m_x, m_y, σ_x, σ_y și r. Semnificația acestor parametrii este imediată, și anume m_x, m_y, și σ_x și σ_y sînt valorile medii, respectiv abaterile medii pătratice ale variabilelor X și Y, iar r coeficientul de corelație.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru aceasta să notăm cu

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2 - \frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x \sigma_y} + \left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)^2\right]} dy$$

și făcînd substituția

$$\frac{x - m_x}{\sqrt{2}\,\sigma_x} = u, \quad \frac{y - m_y}{\sqrt{2}\,\sigma_y} = v$$

obținem

$$I = \sigma_y \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{1-r^2}[u^2 - 2ruv + v^2]} dv.$$

Cum însă

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Mx^2 \pm 2Nx - P} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}}\, e^{\frac{MP - N^2}{M}},$$

iar în cazul nostru

$$M = \frac{1}{1 - r^2}; \; N = \frac{r\,u}{1 - r^2}; \; P = \frac{u^2}{1 - r^2}$$

rezultă imediat că

$$I = \sigma_y \sqrt{2}\, \sqrt{\pi(1 - r^2)}\, e^{-\left(\frac{u^2}{1-r^2} - \frac{r^2 u^2}{1-r^2}\right)} = \sigma_y \sqrt{2}\, \sqrt{\pi(1 - r^2)}\, e^{-u^2}.$$

Am văzut însă că

$$\rho_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y)\, dy = \frac{\sigma_y \sqrt{2}\, \sqrt{\pi(1 - r^2}}{2\pi\, \sigma_x\, \sigma_y \sqrt{1 - r^2}}\, e^{-u^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma_x}\, e^{-u^2}.$$

Ținînd seama de notațiile introduse, avem

$$\rho_1(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}}.$$

Analog obținem

$$\rho_2(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-m_y)}{2\sigma^2}}.$$

De aici rezultă imediat semnificația lui m_x, m_y, σ_x și σ_y.

Să calculăm acum corelația variabilelor X și Y. Avem

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)\,(y - m_y)\, \rho(x, y)\, dx\, dy.$$

Notînd

$$-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}-\frac{2r\,(x-m_x)\,(y-m_y)}{\sigma_x\,\sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]=Q(x,y)$$

putem scrie

$$\gamma=\frac{1}{2\pi\,\sigma_x\,\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)\,(y-m_y)\,e^{-Q(x,y)}\,dx\,dy.$$

Pentru calculul integralei de mai sus să facem substituția

$$\frac{x-m_x}{\sigma_x\sqrt{2}}=u,\ \frac{1}{\sqrt{2(1-r^2)}}\left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}-r\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)=w.$$

Atunci iacobianul acestei schimbări de variabile este egal cu

$$2\sigma_x\,\sigma_y\sqrt{1-r^2}$$

și prin urmare

$$\gamma=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(u\,\sigma_x\sqrt{2})\,\sigma_y\sqrt{2(1-r^2)}\left(w+\frac{r\,u}{\sqrt{1-r^2}}\right)e^{-u^2-w^2}\,du\,dw=$$

$$=\frac{2\sigma_x\,\sigma_y\sqrt{1-r^2}}{\pi}\int_{-8}^{\infty}u\,e^{-\frac{u^2}{2}}du\int_{-\infty}^{\infty}we^{-w^2}dw+\frac{2\sigma_x\,\sigma_y\,r}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u^2\,e^{-u^2}\,du\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{-w^2}dw.$$

Făcînd calculele obținem

$$\int_{-\infty}^{\infty}ue^{-u^2}\,du=\int_{-\infty}^{\infty}we^{-w^2}\,dw=0;\int_{-\infty}^{\infty}u^2\,e^{-u^2}\,du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

și

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-w^2}\,dw=\sqrt{\pi}.$$

Înlocuind, vom obține

$$\gamma=r\,\sigma_x\,\sigma_y\quad\text{sau}\quad r=\frac{\gamma}{\sigma_x\,\sigma_y},$$

adică r este coeficientul de corelație al variabilelor aleatoare X și Y.

Ținînd seama de formulele care ne dau densitățile de repartiție condiționate vom obține

$$\rho(y/x)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{1-r^2}\,\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}-r\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2}$$

și

$$\rho(x\,|\,y)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{1-r^2}\,\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}-r\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Însă $\rho(y \mid x)$ se poate scrie sub forma

$$\rho(y \mid x) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{1-r^2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_y^2}\left[y - m_y + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x)\right]^2}$$

de unde rezultă că aceasta este densitatea de repartiție a unei legi normale cu valoare medie

$$m_{y/x} = m_y + x(x - m_x)\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

și abatere medie pătratică

$$\sigma_{y/x} = \sigma_y \sqrt{1 - r^2}.$$

3. Repartiția normală s-dimensională

Să considerăm legea dată de următoarea funcție definită în spațiul cu s dimensiuni R_s:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = he^{-\sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}x_i x_j}$$

unde $\sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}x_i x_j \geqslant 0$, adică este o formă pătratică pozitiv definită, iar h este o constantă pozitivă pe care va trebui s-o determinăm astfel ca $f(x_1, x_2, \ldots; x_s)$ să fie o densitate de repartiție.

Vom folosi pentru aceasta notația matricială care va da expresiilor o formă mai elegantă. Să amintim în prealabil cîteva chestiuni în legătură cu calculul matricial.

Dacă notăm simbolic prin (m, n) o matrice cu m linii și n coloane, atunci

$$(m, n)\,(n, p) = (m, p),$$

adică produsul unei matrice cu m linii și n coloane cu o matrice cu n linii și p coloane este o matrice cu m linii și p coloane.

Notăm o matrice pătratică prin

$$A = \|a_{ij}\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} \quad a_{nn} \end{Vmatrix}$$

$i = 1 \ldots, n$

$j = 1 \ldots, n$

Produsul a două matrice se efectuează după regula:

$$\|a_{ij}\| \cdot \|b_{jk}\| = \|c_{ik}\| \text{ unde } c_{ik} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sk}.$$

Transpusa unei matrice A pe care o notăm prin A' este matricea formată cu elementele matricii A, dar în care s-au schimbat liniile în coloane.

Matricea inversă a unei matrice A pentru care $|A| \neq 0$ (unde am notat cu $|A|$ determinantul matricii A) o notăm cu A^{-1} și ea are elementele $a_{ij}^{-1} = \frac{A_{ij}}{|A|}$, unde A_{ij} este minorul corespunzător elementului din matricea A.

Să amintim în continuare că:

$$(AB)' = B'A' \text{ și de asemenea}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Notăm mai departe prin E matricea unitate:

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{Vmatrix}$$

și prin H o matrice ortogonală:

$$H = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{Vmatrix}$$

despre care se știe că

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1 \text{ și } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{hj} = 0$$

și de asemenea

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1 \text{ și } \sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ih} = 0.$$

Pentru o matrice ortogonală avem $H^{-1} = H'$.

Dacă notăm acum prin

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{Vmatrix} \text{ și } A = \|a_{ij}\| \text{ cu } A \neq 0$$

$$i, j = 1, 2, \dots s$$

atunci

$$X' = \| x_1, x_2, \ldots, x_s \|$$

și

$$\sum_{i,j=1}^{s} a_{ij} x_i x_j = X'AX.$$

Într-adevăr,

$$(1, s)(s, s) = (1, s); \quad (1, s)(s, 1) = (1, 1)$$

sau, scris dezvoltat, avem:

$$X'A = \| x_1, x_2, \ldots, x_s \| \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{21} \ldots a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{1s} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1} & a_{s2} \ldots a_{ss} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \| a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \ldots + a_{s1}x_s \ldots a_{13}x_2 + \ldots + a_{ss}x_s \| =$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{s} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{s} a_{i2}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} a_{is}x_i \right\| .$$

$$X'AX = \left\| \sum_{i=1}^{s} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{s} a_{i2}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} a_{is}x_i \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{s} a_{i1}x_i x_1 + \sum_{i=1}^{s} a_{i2}x_i x_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{s} a_{is}x_i x_s \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{s} \sum_{i=1}^{s} a_{ij}x_i x_j \right\| .$$

Prin urmare,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = h\, e^{-\sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j} = h\, e^{-X'AX}.$$

Să dovedim acum că $f(x_1, x_2, x \ldots x_s)$ este o densitate de repartiție, adică:

1) $f(x_1, x_2, \ldots, x_s) \geqslant$ o care este evidentă în virtutea celor presupuse și

2) $$h \int\int \ldots \int_{R_s} e^{-X'AX}\, dx_1, dx_2 \ldots dx_s = 1.$$

Pentru aceasta vom face o transformare ortogonală

$$X = HY.$$

Din algebra liniară se știe că există o transformare ortogonală care reduce forma pătratică pozitiv definită $\sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}x_ix_j$ la o sumă de s pătrate $X'AX = \sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}x_ix_j = (HY)'AHY = Y'H'AHY = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i y_i^2$, unde λ_i sînt rădăcinile ecuației de gradul s: $|A - \lambda E| = 0$ adică

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$(-1)^s\lambda^s + \dots + |A| = 0.$$

Întrucît $X'AX = \sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}x_ix_j$ este o formă pătratică pozitiv definită, urmează că λ_i, $i = 1, 2, \dots, s$ sînt reale și pozitive.

În plus, transformarea fiind ortogonală, determinantul funcțional corespunzător are valoarea 1 și prin urmare avem egalitatea:

$$h\iint\dots\int_{Rs} e^{-\sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}x_ix_j}\,dx_1\,dx_2\dots dx_s = h\iint\dots\int_{Rs} e^{-X'AX}\,dx_1\,dx_2\dots dx_s =$$

$$= h\iint\dots\int_{Rs} e^{-\sum_{i=1}^{s}\lambda_i y_i^2}\,dy_1\,dy_2\dots dy_s = h\prod_{i=1}^{s}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_i y_i^2}\,dy_i = 1.$$

Integrala $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_i y_i^2}\,dy_i$ prin substituția $y_i = \frac{z_i}{\sqrt{\lambda_i}}$

Se transformă în

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_i^2}\,dz_i = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_i}}.$$

Vom avea deci relația:

$$h\prod_{i=1}^{s}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_i y_i^2}\,dy_i = \frac{h}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_s}}\prod_{i=1}^{s}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_i^2}\,dz_i = \frac{h(\pi)^{s/2}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_s}} = 1$$

$$h = \frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_s}}{\pi^{s/2}}$$

Scanned with OKEN Scanner

cum însă din ecuația $(-1)^s\lambda^s + \ldots + |A| = 0$ rezultă

$$\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_s = \frac{(-1)^s |A|}{(-1)^s} = |A|,$$

avem în definitiv

$$h = \frac{|A|}{\pi^{s/2}}$$

și am găsit astfel că funcția de frecvență a repartiției normale cu s dimensiuni este:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \frac{\sqrt{|A|}}{\pi^{s/2}} e^{-X'AX}.$$

Pentru a păstra analogia cu funcția de frecvență a repartiției normale cu o singură dimensiune $N(m, \sigma)$ vom considera funcția de frecvență:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{s/2}} e^{-\frac{1}{2}(X'-m')A(X-m)}$$

cu forma pătratică $(X' - m')\, A\, (X - m)$ pozitiv definită și

$$m = \left\| \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix} \right\|; \quad m' = \| m_1, m_2, \ldots, m_s \|.$$

Funcția caracteristică a repartiției normale cu s dimensiuni.

Să considerăm vectorul $t = \left\| \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_s \end{matrix} \right\|$ și transpusa lui $t' = \| t_1 t_2 \ldots t_s \|$

$$t'X = \sum_{i=1}^{s} t_i x_i.$$

Prin definiție, vom numi funcție caracteristică a repartiției normale cu s dimensiuni, expresia

$$\varphi(t) = M(e^{it'x}).$$

Aceasta, scrisă explicit, devine:

$$\varphi(t) = \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{s/2}} \int\int \ldots \int_{R_s} e^{it'X - \frac{1}{2}X'AX}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_s.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să aplicăm din nou transformarea ortogonală folosită mai înainte $X = HY$, care știm că reduce forma pătratică $X'AX$ la suma de pătrate

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i y_i^2 .$$

Se știe însă că printr-o transformare oarecare $X = HY$, vectorul t se transformă într-un vector u, astfel că:

$$t = (H')^{-1}u .$$

Cum însă transformarea este ortogonală, urmează că $H' = H^{-1}$ și $(H')^{-1} = (H^{-1})^{-1} = H$, de unde

$$t = Hu.$$

În felul acesta, vom avea:

$$t'X = (Hu)'HY = u'H'HY = u'H^{-1}HY = u'Y,$$

iar determinantul funcțional al transformării liniare fiind 1 avem

$$\varphi(t) = \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{s/2}} \int\int \dots \int_{R_s} e^{iu'Y - \frac{1}{2}Y'H'AHY}\, dy_1 dy_2 \dots dy_s =$$

$$= \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{s/2}} \int\int \dots \int_{R_s} e^{i\sum_{j=1}^{s} u_j y_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s} \lambda_j y_j^2}\, dy_1 dy_2 \dots dy_s =$$

$$= \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{s/2}} \prod_{j=1}^{s} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu_j y_j - \frac{1}{2}\lambda_j y_j^2}\, dy_j.$$

Să calculăm integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu_j y_j - \frac{1}{2}\lambda_j y_j^2}\, dy_j$$

$$iu_j y_j - \frac{1}{2}\lambda_j y_j^2 = -\frac{\lambda_j}{2}\left(y_j^2 - \frac{2iu_j y_j}{\lambda_j}\right) = -\frac{\lambda_j}{2}\left(y_j - \frac{iu_j}{\lambda_j}\right)^2 - \frac{u_j^2}{2\lambda_j}$$

$$\varphi(t) = \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{s/2}} \prod_{j=1}^{s} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu_j y_j - \frac{1}{2}\lambda_j y_j^2}\, dy_j =$$

$$= \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{s/2}} \prod_{j=1}^{s} e^{-\frac{u_j^2}{2\lambda_j}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda_j \left(y_j - \frac{iu_j}{\lambda_j}\right)^2} dy_j.$$

Facem transformarea

$$\sqrt{\lambda_j}\left(y_j - \frac{iu_j}{\lambda_j}\right) = z_j$$

$$\varphi(t) = \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{s/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\frac{u_j^2}{\lambda_j}} \prod_{j=1}^{s}\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z_j^2}{2}} dz_j =$$

$$= \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{s/2}} \cdot \frac{(2\pi)^{s/2}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_s}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\frac{u_j^2}{\lambda_j}}$$

deci

$$\varphi(t) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\frac{u_j^2}{\lambda_j}}$$

Am obținut funcția caracteristică în funcție de vectorul u.
Să căutăm s-o exprimăm în funcție de vectorul t și transpusa lui t'.

Știm că am făcut transformarea ortogonală

$$X = HY \quad \text{pentru care am găsit că}$$

$$\sum_{j=1}^{s}\lambda_j y_j^2 = X'AX = Y'H'AHY = Y'BY,$$

unde

$$B = H'AH = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0\,0 \dots 0 \\ 0 & \lambda_2\,0 \dots 0 \\ \cdot & \dots \dots \dots \\ 0 & 0\,0 \dots \lambda_s \end{Vmatrix}.$$

Întrucît am găsit

$$\varphi(t) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\frac{u_j^2}{\lambda_i}},$$

putem să scriem:

$$\sum_{j=1}^{s}\lambda_j u_j^2 = u'B\,u,$$

de unde urmează că

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{u_j^2}{\lambda_j} = u'B^{-1}u$$

pentru că

$$B^{-1} = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_s} \end{matrix} \right\|.$$

Vrem să trecem acum de la forma pătratică pozitiv definită $u'Bu$ la forma pătratică pozitiv definită $t'Ct$, unde matricea C va trebui s-o determinăm iar pe B o cunoaștem: $B = H'AH$.
Avem: $t = Hu$.

Înmulțind la stînga cu H^{-1} găsim:

$$H^{-1}t = H^{-1}Hu = Eu = u \text{ și } u' = (H^{-1}t) = t'H.$$

H fiind ortogonală, avem $H' = H^{-1}$.

Înlocuind

$$u'B^{-1}u = u'(H'AH)^{-1}u = u'H^{-1}A^{-1}(H')^{-1}u = u'H^{-1}A^{-1}Hu$$
$$((H')^{-1} = (H^{-1})^{-1} = H),$$
$$u'B^{-1}u = u'H^{-1}A^{-1}Hu = t'HH^{-1}A^{-1}HH^{-1}t = t'EA^{-1}Et$$
$$u'B^{-1}u = t'A^{-1}t.$$

Și deci

$$\varphi(t) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\frac{u_j^2}{\lambda_j}} = e^{-\frac{1}{2}u'B^{-1}u} = e^{-\frac{1}{2}t'A^{-1}t}.$$

Cunoscînd acum funcția caracteristică a distribuției normale cu s dimensiuni care are funcția de frecvență

$$f(x_1, x_2, \dots x_s) = \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{s/2}} e^{-\frac{1}{2}X'AX},$$

putem să determinăm funcția caracteristică a distribuției normale cu funcția de frecvență

$$\frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{s/2}} e^{-\frac{1}{2}(X'-m')A(X-m)},$$

făcînd transformarea

$$X = Y + m$$

și găsim că:

$$\psi(t) = M(e^{it'X}) = M(e^{it'(Y+m)}) = M(e^{it'Y+it'm}) = e^{it'm} M(e^{it'Y}) =$$

$$= e^{it'm-\frac{1}{2}t'A^{-1}t},$$

deci

$$\psi(t) = e^{it'm-\frac{1}{2}t'A^{-1}t}.$$

Momentele distribuției normale s-dimensionale. Momentele distribuției normale cu s dimensiuni se calculează cu ajutorul funcției caracteristice.

Avînd

$$\varphi(t) = e^{-\frac{1}{2}t'A^{-1}t} = e^{-\frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{s} a_{hk}^{-1}t_h t_k}$$

obținem:

$$Mh = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_h}\right)_{t_1,\, t_2\, \ldots,\, t_s = 0}$$

$$Mh_k = \frac{1}{i^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t_h \partial t_k}\right)_{t_1,\, t_2,\, \ldots\, t_s = 0}.$$

. . . . . .

După aceeași metodă se calculează momentele distribuției normale cu s dimensiuni a cărei funcție de frecvență este

$$\frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{s/2}} e^{-\frac{1}{2}(X'-m')A(X-m)}.$$

§ 4. Legi limită

1. Preliminarii

În cele ce urmează vom da o serie de teoreme care arată rolul central jucat de repartiția normală.

Teoremă. *Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ un șir de variabile aleatoare independente și să presupunem că urmează aceeași distribuție. Dacă $M(f_k) = M$ și $D(f_k) = D$, $(k = 1, 2, \ldots)$, notînd cu*

$$\beta_n = f_1 + f_2 + \ldots f_n$$

și cu

$$\beta_n^* = \frac{\beta_n - M(\beta_n)}{D(\beta_n)},$$

iar cu $F_n(x)$ funcția de repartiție corespunzătoare variabilei β_n^*, atunci

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Demonstrație. Să notăm cu $\varphi(t)$ funcția caracteristică a variabilei f_k și cu $\psi(t)$ funcția caracteristică corespunzătoare variabilei $f_k - M = \eta_k$. Din proprietățile funcției caracteristice rezultă că

$$\psi(t) = e^{-itMt}\varphi(t).$$

Notînd cu $\psi_n(t)$ funcția caracteristică a variabilei $\beta_n^* = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n}{D\sqrt{n}}$ (deoarece $D(\beta_n) = D\sqrt{n}$, iar $\beta_n - M(\beta_n) = \eta_1 + \ldots + \eta_n$ avem

$$\psi_n(t) = \left[\psi\left(\frac{t}{D\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

Dezvoltînd în serie funcția $\psi\left(\frac{t}{D\sqrt{n}}\right)$ și ținînd seama că $M(f_k - M) = M(\eta_k) = 0$ rezultă că

$$\psi\left(\frac{t}{D\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{D^2t^2}{2} + 0(t^2)$$

și deci

$$\psi_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n}(1 + \varepsilon_n)\right)^n$$

unde

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Rezultă imediat că

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

ceea ce demonstrează teorema enunțată.

Vom demonstra acum două teoreme limită importante.

2. Teorema lui Leapunov

Teoremă. *Fie $\{f_n\}_{1\leqslant n<\infty}$ un șir de variabile aleatoare independente. Să presupunem că*

$$M(f_k) = M_k,$$
$$D(f_k) = D_k,$$
$$\sqrt[3]{M(|f_k - M_k|^3)} = H_k$$

există pentru orice k. Să notăm cu

$$S_n = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \ldots + D_n^2},$$
$$K_n = \sqrt[3]{H_1^3 + H_2^3 + \ldots + H_n^3}$$

cu

$$\beta_n = f_1 + \ldots + f_n$$

și cu

$$\beta_n^* = \frac{\beta_n - M(\beta_n)}{D(\beta_n)} = \frac{\beta_n - \sum_{k=1}^{n} M_k}{S_n}.$$

Fie acum $F_n^*(x)$ funcția de repartiție a variabilei β_n^*. În aceste condiții, dacă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K_n}{S_n} = 0,$$

avem

$$\lim_{n\to\infty} F_n^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Demonstrație. Vom demonstra această teoremă arătînd că funcția caracteristică a variabilei β_n^* tinde către funcție caracteristică legii normale.

Să notăm cu $\varphi_{f_k}(t)$ funcția caracteristică a variabilei f_k și cu $\varphi_k(t)$ funcția caracteristică a variabilei $f_k - M_k$. Atunci, din proprietățile funcției caracteristice, rezultă că

$$\varphi_k(t) = e^{-itM_k}\varphi_{f_k}(t).$$

Dezvoltînd în serie Taylor avem

$$\varphi_k(t) = a_k(t) + ib_k(t).$$

Dacă notăm cu $G_k(x)$ funcția de repartiție a variabilei $f_k - M_k$, atunci

$$a_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos xt\, dG_k(x)$$

și

$$b_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin xt\, dG_k(x)$$

și dezvoltînd în serie avem

$$a_k(t) = 1 - \frac{D_k^2 t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \cos(x\theta_1 t)\, dG_k(x)$$

$$b_k(x) = -\frac{t^3}{6} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \sin(x\theta_2 t)\, dG_k(x)$$

cu $|\theta_i| < 1$ $(i = 1, 2)$. Putem scrie că

$$\psi_k(t) = 1 - \frac{D_k^2 t^2}{2} + R_k,$$

unde

$$|R_k| \leqslant \frac{|t^3|}{3} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 dG_k(x) = \frac{|t|^3 H_k^3}{3}.$$

Fie acum $\varphi_n(t)$ funcția caracteristică a variabilei β_n^*; întrucît șirul $\{f_n\}$ este un șir de variabile aleatoare independente, avem

$$\varphi_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k\left(\frac{t}{S_n}\right).$$

Cum însă

$$\varphi_k\left(\frac{t}{S_n}\right) = 1 - \frac{D_k^2 t^2}{2S_n^2} + \frac{R_k}{S_n^3},$$

rezultă că

$$\log \varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 - \frac{D_k^2 t^2}{2S_n^2} + \frac{R_k}{S_n^3}\right).$$

Deoarece $\frac{K_n}{S_n} \to 0$, pentru $\varepsilon > 0$ există un n_0 astfel încît dacă $n > n_0$, avem

$$\frac{K_n}{S_n} < \frac{\varepsilon}{|t|} \text{ și deci } \frac{H_k^3}{S_n^3} < \frac{\varepsilon^3}{|t|^3}.$$

Însă din inegalitatea lui Leapunov știm că

$$D_k \leqslant H_k$$

și deci

$$\frac{D_k^2}{S_n^2} \leqslant \frac{H_k^2}{S_n^2} = \left(\frac{H_k^3}{S_n^3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

sau

$$\frac{D_k^2}{S_n^2} \leqslant \frac{K_n^2}{S_n^2} \leqslant \frac{\varepsilon^2}{t^2} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Fie $0 < \varepsilon < 1$, atunci

$$\left| -\frac{t^2 D_k^2}{2S_n^2} + \frac{R_k}{S_n^3} \right| \leqslant \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} < \varepsilon^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

și deci putem scrie

$$\log \varphi_n(t) + \frac{t^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} \left[\log \left(1 - \frac{t^2 D_k^2}{2S_n^2} + \frac{R_k}{S_n^3} \right) + \frac{t^2 D_k^2}{2S_n^2} \right].$$

Cum însă

$$|\log (1 + x) - x| \leqslant |x|^2, \text{ dacă } |x| \leqslant \frac{1}{2},$$

notînd

$$A_k = -\frac{t^2 D_k^2}{2S_n^2} \text{ și } B_k = \frac{R_k}{S_n^3}$$

putem scrie că

$$\left| \log \varphi_n(t) + \frac{t^2}{2} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \log (1 + A_k + B_k) - (A_k + B_k) + B_k \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |A_k + B_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |B_k|.$$

Însă

$$\sum_{k=1}^{n} |B_k| \leqslant \frac{|t|^3 K_n^3}{3S_n^3} \leqslant \frac{\varepsilon^3}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k + B_k|^2 \leqslant \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} (|A_k| + |B_k|) \leqslant \frac{\varepsilon^2 |t|^2}{2} + \frac{\varepsilon^5}{3}$$

și deci

$$\left| \log \varphi_n(t) + \frac{t^2}{2} \right| \leqslant \frac{\varepsilon^2 |t|^2}{2} + \frac{\varepsilon^5}{3} + \frac{\varepsilon^3}{3} < \varepsilon$$

dacă

$$\varepsilon < \frac{1}{3|t|^2}.$$

Rezultă că

$$\lim_{n \to \infty} \log \varphi_n(t) = -\frac{t^2}{2}$$

sau

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci din teorema de convergenţă a funcţiilor caracteristice rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} F_n^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

şi cu aceasta teorema este demonstrată.

O b s e r v a ţ i a 1. Teorema este adevărată şi dacă variabilele aleatoare f_k au aceeaşi repartiţie. Atunci $D_k = D$ şi $H_k = H$ şi deci

$$S_n = D\sqrt{n} \quad \text{şi} \quad K_n = H\sqrt[3]{n},$$

iar

$$\frac{K_n}{S_n} = \frac{H}{D}\,\frac{1}{\sqrt[6]{n}}.$$

care tinde către zero, cînd $n \to \infty$.

O b s e r v a ţ i a 2. Dacă $|f_k - M_k| \leqslant A$ $(k = 1, 2, \ldots)$ şi $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ teorema lui Leapunov rămîne adevărată. Într-adevăr

$$H_k^3 = M(|f_k - M_k|^3) \leqslant AM(|f_k - M_k|^2) = AD_k^2.$$

Rezultă că

$$K_n \leqslant \sqrt[3]{A}\, S_n^{\frac{2}{3}}$$

şi în sfîrşit că

$$\frac{K_n}{S_n} \leqslant \sqrt[3]{\frac{A}{S_n}}.$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K_n}{S_n} = 0.$$

3. Teorema lui Lindeberg

Teoremă. *Fie* $\{f_n\}_{1\leqslant n<\infty}$ *un şir de variabile aleatoare independente şi* $F_k(x)$ *funcţia de repartiţie a variabilei* f_k. *Să presupunem că* $M(f_k) = 0$, $(k = 1, 2, \ldots)$ *şi că* $D^2(f_k)$ *există, pentru* $k = 1, 2, \ldots$ *Fie*

$$S_n^2 = \sum_{k=1}^{n} D^2(f_k).$$

Să presupunem că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\underset{1\leqslant k\leqslant n}{Max}\, D_k}{S_n} = 0.$$

Dacă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{S^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| > \varepsilon S_n} x^2 dF_k(x) = 0,$$

condiție ce se numește condiția lui Lindeberg, atunci dacă notăm cu

$$\beta_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} f_k}{S_n}$$

avem

$$\lim_{n\to\infty} P(\beta_n < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Demonstrație. Ne vom folosi ca și la teorema precedentă de funcția caracteristică. Fie $\varphi_k(t)$ funcția caracteristică a variabilei f_k. Atunci

$$\varphi_k\left(\frac{t}{S_n}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{itx}{S_n}} dF_k(x)$$

sau, pentru orice $\varepsilon > 0$,

$$\varphi_k\left(\frac{t}{S_n}\right) = \int_{|x|\leqslant \varepsilon S_n} e^{\frac{itx}{S_n}} dF_k(x) + \int_{|x|>\varepsilon S_n} e^{\frac{itx}{S_n}} dF_k(x).$$

Să dezvoltăm acum în serie pe $e^{\frac{itx}{S_n}}$ pînă la al doilea, respectiv al treilea termen. Avem

$$e^{\frac{itx}{S_n}} = 1 + \frac{itx}{S_n} + \theta_1 \frac{x^2t^2}{2S_n^2},$$

respectiv

$$e^{\frac{itx}{S_n}} = 1 + \frac{itx}{S_n} - \frac{x^2t^2}{2S_n^2} + \theta_2 \frac{x^3t^3}{6S_n^3},$$

unde $|\theta_i| < 1$, $(i = 1, 2)$.

Să observăm însă că

$$(\alpha) \int_{|x|\leqslant \varepsilon S_n} e^{\frac{itx}{S_n}} dF_k(x) = \int_{|x|\leqslant \varepsilon S_n} dF_k(x) + \int_{|x|\leqslant \varepsilon S_n} \frac{ixt}{S_n} dF_k(x) - \int_{|x|\leqslant \varepsilon S_n} \frac{x^2t^2}{2S_n^2} dF_k(x) + R_{k,1}$$

și analog

$$(\beta)\quad \int_{|x|>\varepsilon S_n} e^{\frac{itx}{S_n}}\, dF_k(x) = \int_{|x|>\varepsilon S_n} dF_k(x) + \int_{|x|>\varepsilon S_n} \frac{ixt}{S_n}\, dF_k(x) + R_{k,2},$$

unde

$$|R_{k,1}| = \left| \int_{|x|\leqslant\varepsilon S_n} \theta_2 \frac{x^3 t^3}{6 S_n^3}\, dF_k(x) \right| \leqslant \frac{|t|^3 \varepsilon D_k^2}{S_n^2},$$

iar

$$|R_{k,2}| = \left| \int_{|x|>\varepsilon S_n} \theta_1 \frac{x^2 t^2}{2 S_n^2}\, dF_k(x) \right| \leqslant \frac{|t|^2}{S_n^2} \int_{|x|>\varepsilon S_n} x^2 dF_k(x).$$

Adunînd egalitățile (α) și (β) și ținînd seama că

$$M(f_k) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_k(x) = 0,$$

obținem

$$\varphi_k\left(\frac{t}{S_n}\right) = 1 - \frac{t^2 D_k^2}{2 S_n^2} + R_{k,3},$$

unde

$$|R_{k,3}| \leqslant \frac{|t|^3 \varepsilon D_k^2}{S_n^2} + \frac{2|t|^2}{S_n^2} \int_{|x|>\varepsilon S_n} x^2 dF_k(x) \leqslant 3|t|^2 \varepsilon^2 \leqslant \frac{1}{3}$$

dacă n este suficient de mare, astfel încît $\frac{D_k}{S_n} < \varepsilon$ și $|\varepsilon t| < \frac{1}{3}$.

Cum însă

$$\log(1 + x) = x + \theta x^2 \text{ cu } |\theta| < 1, \text{ dacă } |x| < \frac{1}{2}$$

atunci putem scrie că

$$\log \varphi_k \frac{t^2}{S_n} = -\frac{t^2 D_k^2}{2 S_n^2} + R_{k,4}.$$

Ținînd seama că

$$(a + b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2)$$

avem

$$|R_{k,4}| \leqslant |R_{k,3}| + \left| -\frac{t^2 D_k^2}{2 S_n^2} + R_{k,3} \right|^2 \leqslant |R_{k,3}| + 2|R_{k,3}|^2 + \frac{t^4 D_k^4}{2 S_n^4}.$$

Să notăm acum cu $\psi_n(t)$ funcția caracteristică a variabilei β_n. Avem

$$\psi_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k\left(\frac{t}{S_n}\right)$$

sau

$$\log \psi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \log \varphi_k\left(\frac{t}{S_n}\right),$$

de unde

$$\log \psi_n(t) = -\frac{t^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} R_{k,4}.$$

Însă

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|t|^4 D_k^4}{S_n^4} \leqslant |t|^4 \cdot \left(\frac{\underset{1\leqslant k\leqslant n}{Max}\, D_k}{S_n}\right)^4 \leqslant t^4 \varepsilon^4$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} \log \psi_n(t) = -\frac{t^2}{2}$$

sau

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

de unde rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} P(\beta_n < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

și cu aceasta teorema este demonstrată.

Observație. Dacă condiția lui Leapunov este îndeplinită, atunci este îndeplinită și condiția lui Lindeberg. Într-adevăr

$$\frac{\underset{1\leqslant k\leqslant n}{Max}\, D_k}{S_n} \leqslant \frac{\underset{1\leqslant k\leqslant n}{Max}\, H_k}{S_n} \leqslant \frac{K_n}{S_n}$$

și

$$\int_{|x|>\varepsilon S_n} x^2 dF_k(x) \leqslant \frac{1}{\varepsilon S_n} \int_{|x|>\varepsilon S_n} |x|^3 dF_k(x) \leqslant \frac{1}{\varepsilon S_n} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3\, dF_k(x) = \frac{H_k^3}{\varepsilon S_n},$$

de unde rezultă că

$$\frac{1}{S_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\varepsilon S_n} x^2 dF_k(x^3) \leqslant \frac{K_n^3}{\varepsilon S_n^3}.$$

4. Convergența către legea Poisson

Vom da o condiție necesară și suficientă pentru ca un șir de o variabilă aleatoare să conveargă către legea Poisson. Pentru demonstrarea acestei legi limită vom utiliza funcția generatoare.

Teoremă. *Fie* $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nkn}, \ldots$ *un șir de variabile aleatoare independente, care iau valori întregi nenegative. Să notăm*

$$P(\xi_{nk} = r) = p_{nk}(r) \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, k_n \\ n = 1, 2, \ldots \\ r = 0, 1, \ldots \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} p_{nk}(r) = R_{nk}$$

și

$$\eta_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \ldots + \xi_{nkn}$$

Să presupunem că următoarele condiții sînt îndeplinite

$$(\alpha) \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{kn} p_{nk}(1) = \lambda,$$

$$(\beta) \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Max}_{1\leqslant k\leqslant kn} (1 - p_{nk}(0)) = 0,$$

$$(\gamma) \quad \lim_{u\to\infty} \sum_{k=1}^{kn} R_{nk} = 0.$$

Atunci, distribuția variabilei η_n *converge către distribuția Poisson, cu valoarea medie egală cu* λ.

Demonstrație. Pentru demonstrarea acestei teoreme vom folosi funcția generatoare și teoremele stabilite mai înainte. Să notăm cu $g_{nk}(z)$ funcția generatoare a variabilei ξ_{nk}, atunci

$$g_{nk}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} p_{nk}(r) z^r$$

și ținînd seama de notațiile introduse rezultă că

$$|g_{nk}(z) - p_{nk}(0) - P_{nk}(1) z| \leqslant R_{nk}$$

sau

$$|g_{nk}(z) - 1 - p_{nk}(1)(z - 1)| \leqslant 2R_{nk},$$

deoarece este evident că

$$p_{nk}(0) - (1 - p_{nk}(1) = - R_{nk}$$

Ținînd seama că

$$|\log(1+x)-x| \leqslant |x|^2,$$

dacă $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ și că

$$|g_{nk}(z)-1| \leqslant 2(1-p_{nk}(0)),$$

rezultă că pentru n suficient de mare avem

$$|\log g_{nk}(z) - p_{nk}(1)(z-1)| \leqslant 2R_{nk} + 4(1-p_{nk}(0))^2. \qquad (\alpha)$$

Această inegalitate o vom utiliza în mod esențial.

Să scriem acum funcția generatoare a variabilei η_n. Deoarece variabilele ξ_{nkn} sînt independente, din teorema demonstrată pentru funcții generatoare, notînd cu $G_n(z)$ funcția generatoare a variabilei η_n, avem

$$G_n(z) = \prod_{k=1}^{k_n} g_{nk}(z).$$

Deci putem scrie, ținînd seama de (α)

$$\left|\log G_n(z) - \left(\sum_{k=1}^{k_n} p_{nk}(1)(z-1)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k=1}^{kn} R_{nk} + 4\,\underset{1\leqslant k\leqslant k_n}{Max}\,(1-p_{nk}(0))\left[\sum_{k=1}^{k_n} R_{nk} + p_{nk}(1))\right];$$

din condițiile teoremei rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \log G_n(z) = \lambda(z-1)$$

și în sfîrșit obținem că

$$\lim_{n\to\infty} G_n(z) = e^{\lambda}(z-1).$$

Însă aceasta este funcția generatoare corespunzătoare repartiției Poisson. Cu aceasta teorema este demonstrată.

CAPITOLUL III

FUNCȚII ALEATOARE

Noțiunea de funcție aleatoare s-a format foarte încet, în strînsă legătură cu noțiunea de proces stochastic (sau aleator), cu care de altfel coincide. Această noțiune joacă un rol central în teoria probabilităților. În paragraful 1 se dau o serie de definiții, punîndu-se în evidență familia funcțiilor aleatoare de ordinul doi care intervin în teoria corelației. În paragraful 2 se dau proprietăți ale funcției de corelație, legate în special de operatorii în medie de ordinul doi. Ca aplicații, se studiază în paragraful 3 filtrele liniare, de o deosebită importanță în practica curentă. În sfîrșit, paragraful 4 este consacrat studiului funcțiilor aleatoare staționare și al proprietăților lor specifice.

§ 1. Generalități

1. Noțiunea de funcție aleatoare

Fie $\{\Omega, K, P\}$ un cîmp de probabilitate fixat și $T = (T_1, T_2)$ un interval al dreptei reale R sau chiar R. Prin *funcție aleatoare* sau *proces aleator* (stochastic) vom înțelege o aplicație a lui T în mulțimea variabilelor aleatoare reale* definite pe cîmpul de probabilitate considerat. Cu alte cuvinte o funcție aleatoare $\xi(w, t)$, $w \in \Omega$, $t \in T$ este o familie de variabile aleatoare, care poate fi finită sau infinită, în funcție de mulțimea inițială T. Pentru simplificarea scrierii, vom omite argumentul $w \in \Omega$, cu toate că el este întotdeauna subînțeles.

Fiind dată o funcție aleatoare $\xi(t)$, să considerăm repartițiile n-dimensionale

$$F_{t_1 \dots t_n}(a_1, \dots, a_n) = P(\xi(t_1) < a_1, \dots, \xi(t_n) < a_n) \tag{1}$$

pentru orice $n \in N^*$ și orice $t_i \in T$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Aceste repartiții n-dimensionale caracterizează complet funcția aleatoare (t). Într-adevăr, A. N. Kol-

* Pentru simplificarea expunerii, considerăm cazul real, extensiunea la cazul complex nu prezintă dificultăți principiale.

Scanned with OKEN Scanner

mogorov a demonstrat că dacă sînt date funcțiile (1) și dacă sînt verificate următoarele două condiții:

(a) pentru orice permutare $i_1, \ldots, i_n$ a numerelor $1, \ldots, n$ are loc relația

$$F_{t_{i_1} \ldots t_{i_n}}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \equiv F_{t_1 \ldots t_n}(a_1, \ldots, a_n);$$

(b) dacă $m < n$, atunci are loc relația

$$F_{t_1 \ldots t_m}(a_1, \ldots, a_m) = \lim_{\substack{a_j \to \infty \\ m+1 \leqslant j \leqslant n}} F_{t_1 \ldots t_n}(a_1, \ldots, a_n),$$

atunci există un cîmp de probabilitate $\{\Omega, K, P\}$, o funcție aleatoare care să aibă funcțiile (1) drept repartiții n-dimensionale. Pentru a demonstra această afirmație, să luăm drept Ω mulțimea punctelor de forma $w = (x(t))_{t \in T}$, unde $x(t) \in R$; cu alte cuvinte, luăm drept Ω mulțimea funcțiilor reale definite pe T, acest spațiu avînd dimensiunea dată de cardinalul lui T. Să definim acum pe Ω o familie de funcții $\xi(t, w)$ prin relația

$$\xi(t, w) = x(t).$$

Mulțimii de puncte w

$$\{w;\ \xi(t_j, w) \leqslant a_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

îi atribuim măsura $F_{t_1 \ldots t_n}(a_1, \ldots, a_n)$, iar mulțimii mai generale de puncte w

$$\{w;\ (\xi(t_1, w), \ldots, \xi(t_n, w)) \in A\}, \tag{2}$$

unde $A \in B^n$, îi atribuim măsura

$$\int_A \cdots \int d_{y_1 \ldots y_n} F_{t_1 \ldots t_n}(y_1, \ldots, y_n).$$

Se știe că dacă luăm drept K corpul generat de mulțimile de forma (2), atunci măsura astfel definită poate fi extinsă pe K; drept P vom lua tocmai această măsură extinsă, care se verifică imediat că este o probabilitate. Obținem astfel rezultatul dorit.

O funcție aleatoare $\xi(t)$ este *staționară în sens restrîns*, dacă toate repartițiile (1) verifică condiția

$$F_{t_1+\tau \ldots t_n+\tau}(a_1, \ldots, a_n) = F_{t_1 \ldots t_n}(a_1, \ldots, a_n).$$

De aici rezultă, evident, că pentru o funcție aleatoare staționară în sens restrîns $\xi(t)$, repartițiile unidimensionale ($n = 1$) coincid, adică $F_t(x)$ nu depinde de t, iar repartițiile bidimensionale ($x = 2$) depind numai de diferența $t_2 - t_1$ ș.a.m.d. Din cele amintite mai sus deducem că pentru studiul funcțiilor aleatoare staționare în sens restrîns sînt necesare repartițiile (1), care depind numai de $t_i - t_1$, $1 \leqslant i \leqslant n$. În aplicații practice însă, aceste repartiții sînt foarte greu de manipulat; în consecință s-a pus problema

Scanned with OKEN Scanner

găsirii altor caracteristici cu care să se poată lucra mai ușor. Astfel de caracteristici numerice vor fi momentele, presupuse că există,

$$m_1 \dots m_n(t_1, \dots, t_n) = M(\xi(t_1)^{m_1} \dots \xi(t_n)^{m_n}) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots\dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \, d^n_{x_1 \dots x_n} F_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n).$$

Pentru $n = 1$, $m_1 = 1$ obținem momentul de ordinul întîi (valoarea medie)

$$\mu_1(t) = m(t) = M(\xi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF_t(x);$$

dacă procesul este staționar în sens restrîns, atunci după cum am observat mai sus, $F_t(x)$ nu depinde de t și deci

$$M(\xi(t)) = m = \text{const.}$$

Pentru $n = 2$, $m_1 = m_2 = 1$, obținem momentul de ordinul doi

$$\mu_{11}(t, s) = B(t, s) = M(\xi(t)\, \xi(s)),$$

care poartă numele de *funcția de corelație* a funcției aleatoare considerate $\xi(t)$. Teoria care consideră numai acele proprietăți ale funcțiilor aleatoare care se pot obține din momentele de primele două ordine constituie așa-numita *teorie a corelației* funcțiilor aleatoare.

Evident, dacă funcția aleatoare este staționară în sens restrîns, atunci:

$$M(\xi(t)\, \xi(s)) = B(t - s).$$

Rezultă deci că în teoria corelației funcțiilor aleatoare staționare în sens restrîns intervin o constantă m și o funcție $C(\tau)$ de o singură variabilă τ

$$C(\tau) = M(\xi(t + \tau)\, \xi(t)) = M(\xi(\tau)\, \xi(o)).$$

Se înțelege că cunoașterea primelor două momente nu determină complet funcția aleatoare $\xi(t)$; în majoritatea aplicațiilor practice însă, teoria corelației este suficientă și dă un răspuns satisfăcător.

Deoarece în teoria corelației nu apar repartițiile (1), este necesar ca definiția staționarității să fie modificată. Vom spune deci că o funcție aleatoare $\xi(t)$* *este staționară în sens larg* (pe scurt staționară) dacă există primele două momente și sînt verificate următoarele două condiții

$$M(\xi(t)) = m, \; B(t, s) = M(\xi(t)\, \overline{\xi(s)}) = B(t - s). \tag{3}$$

În cele ce urmează vom înțelege prin staționaritate cea definită prin relațiile (3).

O b s e r v a ț i e . Condițiile (2) implică în mod necesar condițiile (3); reciproca nu este întotdeauna adevărată. Noțiunea de staționaritate în sens larg și noțiunea de staționaritate în sens restrîns coincid însă pentru funcțiile aleatoare gaussiene**, care de altfel sînt complet determinate de valoarea medie și de funcția de corelație.

* În cele ce urmează vom considera funcții aleatoare complexe.

** O funcție aleatoare este *gaussiană* (normală), dacă expresiile date de (1) sînt repartiții gaussiene n-dimensionale.

Scanned with OKEN Scanner

2. Funcții aleatoare de ordinul doi

În cele ce urmează în acest capitol vom presupune că avem de-a face cu funcții aleatoare complexe de *ordinul doi*, adică pentru care

$$M(|\xi(t)|^2) < \infty \tag{4}$$

pentru orice $t \in T$; cu alte cuvinte, ξ este o aplicație a lui T în $L^2(\Omega, K, P)$.

Evident, din (4) și din inegalitatea lui Schwarz rezultă existența funcției de corelație

$$B(t, s) = M(\xi(t)\,\overline{\xi(s)})$$

definită pe $T \times T$; într-adevăr,

$$|B(t,s)| \leqslant [M(|\xi(t)|^2)]^{\frac{1}{2}}[M(|\xi(s)|^2)]^{\frac{1}{2}}.$$

Reciproc, dacă $B(t, s)$ există și este finită pe $T \times T$, atunci

$$M(|\xi(t)|^2) = B(t, t) < \infty,\ t \in T.$$

În mod analog, din aceleași motive rezultă și existența lui $M(|\xi(t)|) < \infty$. Prin urmare, funcțiile de ordinul doi sînt acelea care admit funcții de corelație, iar proprietățile care rezultă din aceste funcții, se numesc *proprietăți de ordinul doi*.

Este de observat că unei funcții de corelație îi corespund mai multe funcții aleatoare. De exemplu, funcțiile de corelație ale funcțiilor aleatoare $\xi(t)$ și $\eta(t) = \alpha\xi(t)$, unde α este o variabilă aleatoare independentă de $\xi(t)$, pentru orice $t \in T$, cu $M|\alpha|^2 = 1$, coincid. Într-adevăr,

$$M\eta(t)\,\overline{\eta(s)} = M|\alpha|^2\xi(t)\overline{\xi(s)} = M|\alpha|^2 M\xi(t)\overline{\xi(s)} = M\xi(t)\overline{\xi(s)}.$$

Pe de altă parte, ipoteza $M|\xi(t)| = 0$ nu restrînge generalitatea problemei, deoarece

(a) dacă $M(\xi(t)) \neq 0, M(\eta(t)) = 0$, unde $\eta(t) = \xi(t) - M(\xi(t))$,

(b) cu notațiile de mai sus și cu $M(\alpha) = 0$, rezultă

$$M\,\eta(t) = 0.$$

Să introducem acum cîteva definiții.

Vom spune că familia de funcții aleatoare $(\xi_\lambda(t))_{\lambda\in\Lambda}$, unde $\Lambda \subset R$ converge în *medie de ordinul doi* (pe scurt, în medie) cînd $\lambda \to \lambda_0$ către funcția aleatoare $\xi(t)$ (care este în mod necesar de ord. II), dacă

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} M(|\xi_\lambda(t) - \xi(t)|^2) = 0 \text{ sau } \lim_{\lambda\to\lambda_0}{}_m\ \xi_\lambda(t) = \xi(t)$$

pentru orice $t \in T$, oricare ar fi modul în care λ tinde către λ_0.

Observație. Din inegalitatea lui Cebîșev rezultă că convergența în medie implică convergența în probabilitate; într-adevăr,

$$P(|\xi_\lambda(t) - \xi(t)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} M_2(|\xi_\lambda(t) - \xi(t)|) \to 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

În general, orice proprietate în medie implică o proprietate analogă în probabilitate.

O funcție aleatoare $\xi(t)$ este *continuă în medie de ordinul doi* (pe scurt, *în medie*) în punctul $t_0 \in T$, dacă

$$\lim_{h\to 0} M(|\xi(t_0+h)-\xi(t_0)|^2)=0.$$

Dacă continuitatea în medie are loc pentru toate punctele din T, spunem pe scurt că $\xi(t)$ este continuă în medie. Fără a intra în detalii se arată că dacă T este un interval finit, atunci continuitatea în medie este uniformă pe T.

O funcție aleatoare $\xi(t)$ este *derivabilă în medie de ordinul doi* (pe scurt, *în medie*) în punctul $t_0 \in T$, dacă există variabila aleatoare $\xi'(t_0)$, astfel încît

$$\lim_{h\to 0} M\left(\left|\frac{\xi(t_0+h)-\xi(t_0)}{h}-\xi'(t_0)\right|^2\right)=0;$$

$\xi'(t_0)=\left.\frac{d\xi(t)}{dt}\right|_{t=t_0}$ este derivata în medie în punctul t_0 a lui $\xi(t)$. Evident, dacă $\xi(t)$ este derivabilă în orice punct $t\in T$, atunci $\xi(t)$ este derivabilă în medie și aplicația $t\longrightarrow\xi'(t)$ este o nouă funcție aleatoare.

O b s e r v a ț i e. Operațiile M și $\frac{d}{dt}$ sînt invertibile; într-adevăr, dacă $\xi(t)$ admite derivata în medie $\xi'(t)$, atunci $\frac{d}{dt}M(\xi(t))=$

$=\lim_{h\to 0}\frac{M(\xi(t+h))-M(\xi(t))}{h}=M\left(\lim_{h\to 0,m}\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}\right)=M(\xi'(t))$, deoarece M și $\lim_m$ sînt invertibile (a se vedea propoziția 1 de mai jos).

Fie acum $\xi(t)$ o funcție aleatoare de ordinul doi și $\delta=(t_j)_{0\leqslant j\leqslant p}$ o diviziune finită a lui T:

$$T_1=t_0<t_1<\ldots<t_p=T_2$$

și $\tilde{\delta}(\tau_j)_{0\leqslant j\leqslant p-1}$ o divizionare asociată lui δ

$$t_j\leqslant\tau_j\leqslant t_{j+1},\qquad 0\leqslant j\leqslant p-1.$$

Să considerăm variabila aleatoare

$$I[\delta,\tilde{\delta}]=\sum_{j=1}^{p-1}\xi(\tau_j)\,(t_{j+1}-t_j).$$

Prin definiție, funcția aleatoare de ordinul doi $\xi(t)$ *este integrabilă Riemann în medie de ordinul doi* (pe scurt, *în medie*) dacă există o variabilă aleatoare, notată cu

$$I=\int_{T_1}^{T_2}\xi(t)\,dt,$$

astfel încît

$$\lim_{|\|\delta\|\|\to 0} M(|I(\delta,\tilde{\delta})-I|^2)=0,$$

unde

$$\| \delta \| = \sup_{0 \leqslant j \leqslant p-1} | t_{j+1} - t_j |$$

Mai general, o funcție aleatoare de ordinul doi $\xi(t)$ este *integrabilă Riemann-Stieltjes* în medie de ordinul doi (pe scurt, *în medie*) în raport cu funcția aleatoare de ordinul doi $\eta(t)$, dacă există o variabilă aleatoare I_η, notată cu

$$I_\eta = \int_{T_1}^{T_2} \xi(t)\, d\eta(t),$$

astfel încît

$$\lim_{\|\delta\| \to 0} M(|I_\eta(\delta, \tilde{\delta}) - I_\eta|^2) = 0,$$

unde

$$I_\eta(\delta, \tilde{\delta}) = \sum_{j=0}^{p-1} \xi(\tau_j)[\eta(t_{j+1}) - \eta(t_j)].$$

Această integrală are proprietăți analoge cu integrala uzuală.

Să presupunem acum că $\xi(t)$ este integrabilă Riemann în medie pe T; pentru $t \in T$, să considerăm integrala nedefinită

$$I(t) = \int_{T_1}^{T_2} \xi(u)\, du;$$

această integrală este pentru orice t fix o variabilă aleatoare, deci cînd t variază obținem o funcție aleatoare. Se demonstrează că dacă $\xi(t)$ este continuă în medie, deci integrabilă în medie, $I(t)$ este derivabilă în medie și derivata sa coincide în medie cu $\xi(t)$, adică

$$M\left(\left|\frac{dI(t)}{dt} - \xi(t)\right|^2\right) = 0, \quad t \in T,$$

ceea ce implică pentru orice t dat

$$\frac{dI(t)}{dt} = \xi(t)$$

aproape peste tot.

Reciproc, dacă $I(t)$ posedă o derivată în medie $\xi(t)$ continuă în medie, integrala în medie a lui $\xi(t)$ coincide în medie cu $I(t)$, abstracție făcînd de o constantă. Aceste proprietăți sînt analogele celor de la integrala obișnuită.

Să amintim acum o proprietate foarte des utilizată

$$\int_T M(\xi(t))\, dt = M\left(\int_T \xi(t)\, dt\right),$$

Scanned with OKEN Scanner

unde prima integrală este riemanniană, iar a doua în medie. Dar

$$\int_T M(\xi(t))\,dt = \lim_{\|\delta\|\to 0} \sum_{j=1}^{p-1} M(\xi(t_j))\cdot(t_{j+1}-t_j) = \lim_{\|\delta\|\to 0} M\left(\sum_{j=1}^{p-1} \xi(t_j)\,(t_{j+1}-t_j)\right) =$$

$$= M\left(\lim_{\|\delta\|\to 0} \sum_{j=1}^{p-1} \xi(\tau_j)\,(t_{j+1}-t_j)\right) = \int_T \xi(t)\,dt = 0.$$

Rezultatul este valabil și pentru integrala Riemann-Stieltjes.
Cele de mai sus se extind și la integrale improprii, în ipoteza că limitele

$$\int_{T_1}^{\infty} \xi(t)\,d\,\eta\,(t) = \lim_{T_2\to\infty} \int_{T_1}^{T_2} \xi(t)\,d\,\eta(t) \qquad \text{(în medie)},$$

$$\int_R \xi(t)\,d\eta(t) = \lim_{\substack{T_1\to-\infty \\ T_2\to\infty}} \int_{T_1}^{T_2} \xi(t)\,d\,\eta(t) \qquad \text{(în medie)}$$

există.

În sfîrșit, prin *derivata a doua generalizată* a unei funcții $f(t, s)$, definită pe $T \times T$ în raport cu t și s, se înțelege limita

$$\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\,\partial s} = \lim_{h,k\to 0} \frac{1}{hk}\,\Delta\,h\,\Delta'\,k\,f(t,\,s),$$

dacă există, unde

$$\Delta_h = f(t+h, s) - f(t, s),$$

$$\Delta'_k = f(t, s+k) - f(t, s),$$

adică

$$\Delta_h\,\Delta'_k = f(t+h, s+k) - f(t+h, s) - f(t, s+k) + f(t, s).$$

Noțiunea de derivată parțială generalizată se extinde la derivate de orice ordin (pentru ordinul întîi derivata generalizată coincide cu derivata ordinară); toate derivatele generalizate ale lui $f(t, s)$ vor fi notate însă cu simbolurile obișnuite pentru derivarea ordinară. Dacă derivata ordinară există și este continuă, derivata generalizată există de asemenea și îi este egală.

§ 2. Proprietăți ale funcției de corelație

1. Proprietăți de structură

Teorema 1. *Au loc proprietățile*

(a) $B(t, t) \geqslant 0$,

(b) $B(t, s) = \overline{B(s, t)}$, ($B(t, s)$ *este hermitiană*).

Într-adevăr, pentru $t = s$, obținem

$$B(t, t) = M(\xi(t)\,\overline{\xi(t)}) = M\,(|\xi(t)|^2) \geqslant 0;$$

de asemenea

$$B(t, s) = M(\xi(t)\,\overline{\xi(s)}) = <\xi(t), \xi(s)> = <\overline{\xi(s)}, \overline{\xi(t)}> = \overline{B(s, t)}.$$

Lemă. *Fie* $1 \leqslant j, k \leqslant n$ *și* $u_k \in R$. *Dacă*

$$Q_n(u) = \sum_{j,k=1}^{n} m_{jk}\, u_j\, u_k \geqslant 0,$$

cu $m_{jk} \in R$, *atunci există o variabilă aleatoare normală n-dimensională* $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *(unele componente putînd fi nule), astfel încît*

$$m_{jk} = M(\xi_j\, \xi_k).$$

Într-adevăr, din proprietățile formelor pătratice, deducem

$$Q_n(u) = R_n(v) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 v_k^2,$$

unde v_k sînt combinații liniare de u_k. Dar

$$e^{-R_n(v)/2} = \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{1}{2}\sigma_k^2 v_k^2}$$

este funcția caracteristică n-dimensională a unui vector normal $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ cu $M(\eta_k) = 0$, $M(\eta_k^2) = \sigma_k^2$. Revenind deci la variabilele inițiale, deducem

$$R_n(v) = \sum_{k=1}^{n} M(\eta_k^2)\, v_k = M\left(\sum_{k=1}^{n} \eta_k\, v_k\right)^2 = M\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\, u_k\right)^2 =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} M(\xi_j\, \xi_k)\, u_j\, u_k = \sum_{j,k=1}^{n} m_{jk}\, u_j\, u_k,$$

unde ξ_k sînt combinații liniare de η_k; deci $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ este un vector normal și

$$M(\xi_j\, \xi_k) = m_{jk}.$$

Definiție. O funcție $f(t, s)$, definită pe $T \times T$, este de *tip pozitiv* dacă pentru orice mulțime finită $T_n \subset T$ și orice funcție $h(t)$, definită pe $T_n = \{t_1, \ldots, t_n\}$, avem

$$\sum_{t,s \in T_n} f(t, s)\, h(t)\, \overline{h(s)} \geqslant 0.$$

Teorema 2. *Pentru ca o funcție* $B(t, s)$, *definită pe* $T \times T$, *să fie o funcție de corelație, este necesar și suficient ca ea să fie de tip pozitiv.*

Să demonstrăm mai întîi necesitatea dacă $B(t, s)$ este o funcție de corelație, atunci

$$\sum_{t,s\in T_n} B(t, s)\ h(t)\,\overline{h(s)} = M\left(\sum_{t,s\in T_n} \xi(t)\,\overline{\xi(s)}\,h(t)\,\overline{h(s)}\right) =$$

$$= M\left(\left|\sum_{t\in T_n} \xi(t)\,h(t)\right|^2\right) \geqslant 0.$$

Să trecem acum la suficiență; trebuie să arătăm că dacă $B(t, s)$ este de tip pozitiv pe $T \times T$, atunci există pe T o funcție aleatoare care are drept funcție de corelație pe $B(t, s)$.

Să observăm mai întîi că dacă $z \in C$, atunci

$$z = Re\, z + i\ Im\, z,\ \bar{z} = Re\, z - i\ Im\, z,$$

de unde rezultă că

$$Re\, z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \qquad Im\, z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

În cazul nostru,

$$Re\, B(t, s) = \frac{B(t,s) + B(s,t)}{2},\ Im\, B(t, s) = \frac{B(t,s) - B(s,t)}{2i}.$$

Să considerăm forma pătratică

$$Q_n(u, v) = \frac{1}{2}\sum_{t,s\in T_n} [Re\ B(t,s)\ (u_t u_s + v_t v_s) - Im\ B(t, s)\ (u_t v_s - u_s v_t)];$$

să arătăm că ea este pozitiv definită. Într-adevăr, dacă $h(t) = u_t - iv_t$,

$$0 \leqslant \frac{1}{2}\sum_{t,s\in T_n} B(t,s)\ h(t)\,\overline{h(s)} = \frac{1}{4}\sum_{t,s\in T_n} \{B(t, s)\,h(t)\,\overline{h(s)} + B(s, t)\,\overline{h(t)}\,h(s)\} =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{t,s\in T_n} \{B(t, s)\ [u_t u_s + v_t v_s + i\ (u_t v_s - u_s v_t)] +$$

$$+ B(s, t)\ [u_t u_s + v_t v_s - i(u_t v_s - u_s v_t)]\} =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{t,s\in T_n} \{(u_t u_s + v_t v_s)\,(B(t, s) + B(s, t)) + i\,(u_t v_s - u_s v_t)\,(B(t,s) - B(s, t))\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{t,s\in T_n} \{Re\ B(t,s)\ (u_t u_s + v_t v_s) - Im\ B(t, s)\ (u_t v_s - u_s v_t)\}.$$

Rezultă deci din lema de mai sus că putem lua expresia $e^{-\frac{1}{2}Q_n(u,v)}$ drept funcție caracteristică a unei repartiții $F_{t_1 \dots t_n}(y_1, z_1, \dots, y_n\ z_n)$ a unui vector aleator normal $2n$-dimensional $(\eta(t_1), \dots, \eta(t_n), \xi(t_1), \dots, \xi(t))$ și

$$M(\eta(t_j)) = M(\xi(t_j)) = 0,$$

$$M(\eta(t_j)\ \eta(t_k)) = M(\xi(t_j)\ \xi(t_k)) = \frac{1}{2}\ Re\ B(t,s),$$

$$M(\eta(t_j)\ \xi(t_k)) = -M(\eta(t_k)\ \xi(t_j)) = -\frac{1}{2}\ Im\ B(t, s).$$

Dacă punem $\xi(t_j) = \eta(t_j) + i\xi(t_j)$, rezultă imediat

$$M(\xi(t_j)) = 0,\ M(\xi(t_j)\,\overline{\xi(t_k)}) = B(t_j, t_k).$$

Repartiția $F_{t_1, \ldots, t_n}(y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n)$ poate fi considerată ca repartiția vectorului normal complex n-dimensional $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Dacă acum facem să varieze n și T_n, repartițiile $F_{t \ldots t_n}$ duc la funcție aleatoare $\xi(t)$, pentru care

$$M(\xi(t)) = 0,\ M(\xi(t)\,\overline{\xi(s)}) = B(t, s),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Observație. Din această teoremă rezultă că oricărei funcții aleatoare îi corespunde o funcție aleatoare normală cu aceeași funcție de corelație.

Corolar. *Partea reală a unei funcții de corelație $B(t, s)$ este o funcție de corelație; partea imaginară corespunzătoare nu este o funcție de corelație decît cînd se anulează.*

Într-adevăr, din teorema de mai sus rezultă că

$$Re\ B(t, s) = M(\sqrt{2}\,\eta(t)\,\sqrt{2}\,\eta(s)).$$

Partea a doua rezultă din faptul că $Im\ B(t, t) = 0$, așa că dacă

$$Im\ B(t, s) = M(\xi(t)\,\overline{\xi(s)})$$

pe $T \times T$, atunci $M(|\xi(t)|^2) = 0 \longrightarrow \xi(t) = 0$ a·p·t și deci $Im\ B(t, s) = 0$.

Teorema 3. *Suma a două funcții de corelație este o funcție de corelație.*

Fie $B_1(t, s)$ și $B_2(t, s)$ funcțiile de corelație și $\xi_1(t)$ și $\xi_2(t)$ două funcții aleatoare care admit aceste funcții de corelație. Putem alege pe $\xi_1(t)$, și $\xi_2(t)$ astfel încît

$$M(\xi_1(t)\,\overline{\xi_2(s)}) = 0$$

pentru orice $t, s \in T$ (de exemplu, este suficient ca variabilele aleatoare $\xi_1(t)$ și $\xi_2(s)$ să fie independente pentru orice $t, s \in T$ și $M(\xi_1(t)) = M(\xi_2(t)) = 0$); în acest caz

$$M[(\xi_1(t) + \xi_2(t))\,\overline{(\xi_1(s) + \xi_2(s))}] = M(\xi_1(t)\,\overline{\xi_1(s)}) + M(\xi_1(t)\,\overline{\xi_2(s)}) +$$
$$+ M(\xi_2(t)\,\overline{\xi_1(s)}) + M(\xi_2(t)\,\overline{\xi_2(s)}) = B_1(t, s) + B_2(t, s).$$

Teorema 4. *Produsul a două funcții de corelație este o funcție de corelație.*

Într-adevăr, cu aceleași notații, să admitem că $\xi_1(t)$ și $\xi_2(t)$ sînt independente; în acest caz

$$M(\xi_1(t)\,\xi_2(t)\,\overline{(\xi_1(s)\,\xi_2(s))}) = M(\xi_1(t)\,\overline{\xi_1(s)})\,M(\xi_2(t)\,\overline{\xi_2(s)}) =$$
$$= B_1(t, s)\ B_2(t, s).$$

O b s e r v a ț i e. Astfel de alegeri sînt posibile, deoarece este suficient să luăm funcțiile aleatoare $\xi_1(t)$ și $\xi_2(t)$ normale pe cîmpurile de probabilități corespunzătoare și după aceea să facem cîmpul de probabilitate produs.

Teorema 5. *Fie o familie de funcții de corelație* $(B_\lambda(t,s))_{\lambda\in\Lambda}$, *dacă* $B_\lambda(t,s)$ *tinde către o limită finită* $B(t,s)$ pe $T\times T$ *cînd* $\lambda\to\lambda_0$, *atunci* $B(t,s)$ *este o funcție de corelație.*

Într-adevăr, deoarece trecerea la limită și sumarea finită pot fi invertite, avem

$$\sum_{t,s\in T_n} B(t,s)\,h(t)\,\overline{h(s)} = \lim_{\lambda\to\lambda_0}\sum_{t,s\in T_n} B_\lambda(t,s)\,h(t)\,\overline{h(s)} \geqslant 0$$

și deci din teorema 3 rezultă că $B(t,s)$ este o funcție de corelație.

O b s e r v a ț i e. Clasa funcțiilor de corelație este închisă față de adunare, înmulțire și trecere la limită.

Teorema 6. *Orice combinație liniară finită cu coeficienți pozitivi de funcții de corelație este o funcție de corelație.*

Într-adevăr, afirmația rezultă din teorema 3 și din faptul că produsul dintre o funcție de corelație și o constantă pozitivă este, evident, o funcție de corelație.

Rezultă de aici că un polinom cu coeficienți pozitivi de funcții de corelație este tot o funcție de corelație, de unde rezultă că orice limită de astfel de polinoame este o funcție de corelație. De asemenea, suma unei serii ai cărei termeni sînt funcții de corelație este o funcție de corelație.

Teorema 7. *Fie* $\xi(t)$ *o funcție aleatoare și* $B(t,s)$ *funcția sa de corelație,* $T_n\subset T$ *o parte finită și* $l_\alpha(t)$, $\alpha\in T_n$, *funcții obișnuite de t. Dacă*

$$\xi_1(t) = \sum_{\alpha\in T_n} l_\alpha(t)\,\xi(\alpha),$$

atunci corelația lui $\xi_1(t)$ *este*

$$B_1(t,s) = \sum_{\alpha,\beta\in T_n} l_\alpha(t)\,B(\alpha,\beta)\,\overline{l_\beta(s)}.$$

Într-adevăr,

$$B_1(t,s) = M\left\{\left(\sum_{\alpha\in T_n} l_\alpha(t)\,\xi(\alpha)\right)\left(\sum_{\beta\in T_n}\overline{l_\beta(s)\,\xi(\beta)}\right)\right\} =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta\in T_n} M\left(l_\alpha(t)\,\xi(\alpha)\,\overline{l_\beta(t)\,\xi(\beta)}\right) = \sum_{\alpha,\beta\in T_n} B(\alpha,\beta)\,l_\alpha(t)\,\overline{l_\beta(s)},$$

adică obținem afirmația dorită.

Dacă T este mărginit și dacă $l(t,s)$ este o funcție continuă pe $T\times T$, atunci teorema precedentă și o trecere la limită arată că integrala:

$$\int_{T\times T} I(t,u)\,B(u,v)\,\overline{l(v,s)}\,du\,dv$$

în ipoteza că are sens, este egală cu funcția de corelație a lui

$$\eta(t) = \int_T l(t, u)\, \xi(u)\, du \qquad \text{(în medie)}.$$

Acest rezultat poate fi atins și în cazul în care $l(t, s)$ are un număr finit de discontinuități de prima specie sau cînd T este nemărginit.

2. Proprietăți în medie

Înainte de a trece la proprietățile în medie propriu-zise, vom da mai întîi două propoziții auxiliare, care vor interveni în demonstrația teoremelor ce urmează.

Propoziția 1. *Fie* $(\xi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *și* $(\xi_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'}$ *două familii de variabile aleatoare, care converg în medie, respectiv, către* ξ *și* ξ', *cînd* $\lambda \to \lambda_0$ *și* $\lambda' \to \lambda_0'$. În acest caz

$$\lim_{\substack{\lambda\to\lambda_0\\ \lambda'\to\lambda_0'}} M(\xi_\lambda\, \overline{\xi}_{\lambda'}) = M(\xi\, \overline{\xi}').$$

Într-adevăr,

$$M(\xi_\lambda\, \overline{\xi}_{\lambda'}) - M(\xi\, \overline{\xi}') = M(\xi_\lambda\, \overline{\xi}_{\lambda'} - \xi\, \xi') =$$

$$= M[(\xi_\lambda - \xi)\,(\overline{\xi}_{\lambda'} - \overline{\xi}') + (\xi_\lambda - \xi)\,\overline{\xi}' + \xi\,(\overline{\xi}_{\lambda'} - \overline{\xi}')] =$$

$$= M[(\xi_\lambda - \xi)\,(\xi_{\lambda'} - \xi')] + M[(\xi_\lambda - \xi)\,\overline{\xi}'] + M[\xi(\overline{\xi}_{\lambda'} - \overline{\xi}').$$

Dar $|M[(\xi_\lambda - \xi)\,(\overline{\xi}_{\lambda'} - \overline{\xi}')]|^2 \leqslant M(|\xi_\lambda - \xi|^2)\, M(|\xi_{\lambda'} - \xi'|^2) \to 0,$

$$|M[(\xi_\lambda - \xi)\,\overline{\xi}'^2]|^2 \leqslant M(|\xi_\lambda - \xi|^2)\, M(|\xi'|^2) \to 0,$$

$$|M[\xi(\overline{\xi}_{\lambda'} - \overline{\xi}')]|^2 \leqslant M(|\xi|^2)\, M(|\xi_{\lambda'} - \xi'|^2) \to 0,$$

de unde rezultă afirmația făcută.

Propoziția 2. *Fie* $(\xi_\lambda(t))_{\lambda\in\Lambda}$ *o familie de funcții aleatoare; condiția necesară și suficientă pentru ca* $\xi_\lambda(t)$ *să convergă în medie către o funcție aleatoare de ordinul doi* $\xi(t)$ *cînd* $\lambda \to \lambda_0$ *este ca limita*

$$\lim_{\lambda,\lambda'\to\lambda_0} M(\xi_\lambda(t)\, \overline{\xi_{\lambda'}(t)})$$

să existe pentru orice $t\in T$ *și să nu depindă de felul în care* λ *și* λ' *tind către* λ_0. *În aceste condiții, funcția de corelație* $B(t, s)$ *a lui* $\xi(t)$ *este dată de relația*

$$B(t, s) = \lim_{\lambda\to\lambda_0} M(\xi_\lambda(t)\, \overline{\xi_\lambda(s)}).$$

Condiția este necesară. Observăm că dacă luăm în propoziția 1

$$\xi_\lambda = \xi_\lambda(t), \quad \xi_{\lambda'} = \xi_{\lambda'}(s),$$

obținem

$$\lim_{\lambda,\lambda'\to\lambda_0} M(\xi_\lambda(t)\,\overline{\xi_{\lambda'}(s)}) = M(\xi(t)\,\overline{\xi(s)})$$

și deci cu atît mai mult

$$\lim_{\lambda,\lambda'\to\lambda_0} M(\xi_\lambda(t)\,\overline{\xi_{\lambda'}(t)}) = M(|\xi(t)|^2).$$

Condiția este suficientă. Într-adevăr,

$$M(|\xi_\lambda(t) - \xi_{\lambda'}(t)|^2) = M(|\xi_\lambda|^2) + M(|\xi_{\lambda'}|^2) - M(\xi_\lambda(t)\,\overline{\xi_{\lambda'}(t)}) -$$

$$- M(\overline{\xi_\lambda(t)}\,\xi_\lambda(t)) \to B(t,t) + B(t,t) - B(t,t) - B(t,t) = 0;$$

deci $(\xi_\lambda(t))_{\lambda\in\Lambda}$, $t\in T$, fiind un șir Cauchy, există o limită $\xi(t)$ și

$$M(|\xi(t)|^2) = \lim_{\lambda\to\lambda_0} M(|\xi_\lambda(t)|^2) = \lim_{\lambda\to\lambda_0} M(\xi_\lambda(t)\,\overline{\xi_\lambda(t)}) < \infty,$$

adică $\xi(t)$ este de ordinul doi.

O b s e r v a ț i e. În particular, propoziția este valabilă și pentru variabile aleatoare.

Teorema 8. *Pentru ca funcția aleatoare $\xi(t)$ să fie continuă în medie în T este necesar și suficient ca funcția sa de corelație $B(t, s)$ să fie continuă în $(t, t)\in T\times T$.*

Într-adevăr, pentru ca $\xi(t)$ să fie continuă în medie în punctul $t\in T$, adică

$$\lim_{h\to 0} M(|\xi(t+h) - \xi(t)|^2) = 0$$

în virtutea propoziției 2, luînd $\xi_\lambda(t) = \xi(t+\lambda)$, condiția necesară și suficientă devine

$$\lim_{h,k\to 0} M(\xi(t+h)\,\overline{\xi(t+k)} = \lim_{h,k\to 0} B(t+h, t+k) = B(t,t),$$

ceea ce implică continuitatea lui $B(t, s)$ în punctul $(t, t)\in T\times T$.

Corolar. *Dacă funcția de corelație $B(t, s)$ este continuă pe $T\times T$ în orice punct $(t, t)\in T\times T$, ea este continuă pe $T\times T$.*

Într-adevăr, dacă $B(t, s)$ este continuă în punctele $(t, t)\in T\times T$, rezultă că $\xi(t)$ este continuă în medie, adică

$$\lim_{h\to 0} M(|\xi(t+h) - \xi(t)|^2) = 0,$$

cu alte cuvinte, $\xi_h(t) = \xi(t+h)$ și $\xi_k(s) = \xi(s+k)$ converg în medie, respectiv, către $\xi(t)$ și $\xi(s)$. Atunci din propoziția 1, cu $\xi_\lambda = \xi(t+\lambda)$, $\xi = \xi(t)$, $\xi'_{\lambda'} = \xi(s+\lambda')$, $\xi' = \xi(s)$, rezultă

$$\lim_{h,k\to 0} M(\xi_h(t)\,\overline{\xi_k(s)}) = M(\xi(t)\,\overline{\xi(s)}),$$

adică

$$\lim_{h,k\to 0} B(t+h, s+k) = B(t, s).$$

Teorema 9. *Pentru ca o funcție aleatoare $\xi(t)$ să fie derivabilă în medie în $t \in T$, este necesar și suficient ca derivata a doua generalizată a lui $B(t, s)$ să existe și să fie finită în punctul $(t, t) \in T \times T$.*

Într-adevăr, pentru ca $\xi(t)$ să fie derivabilă în medie în punctul $t \in T$, adică

$$\lim_{h\to 0} M\left(\left|\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h} - \xi'(t)\right|^2\right) = 0,$$

în virtutea propoziției 2, luînd $\xi_h(t) = \dfrac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}$.

Condiția necesară și suficientă este ca limita

$$\lim_{h,k\to 0} M\left(\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}\cdot\overline{\frac{\xi(t+k)-\xi(t)}{k}}\right) = \lim_{h,k\to 0}\frac{1}{hk}\Delta_h\Delta'_k B(t, t)$$

să existe și să fie finită.

Corolarul 1. *Dacă derivata a doua generalizată a lui $B(t, s)$ există și este finită în orice punct $(t, t) \in T \times T$, atunci derivatele*

$$\frac{\partial}{\partial t}B(t, s), \quad \frac{\partial}{\partial s}B(t, s), \quad \frac{\partial^2}{\partial t\partial s}B(t, s)$$

există și sînt finite pe $T \times T$.

Într-adevăr, în condițiile de mai sus, dacă lui $B(t, s)$ îi corespunde funcția aleatoare $\xi(t)$, atunci $\xi'(t)$ există și deci, în virtutea propoziției 1, cu

$$\xi_\lambda = \frac{\xi(t+\lambda)-\xi(t)}{\lambda}, \quad \xi = \xi(t), \quad \xi'_{\lambda'} = \xi' = \xi(s),$$

$$M(\xi'(t)\overline{\xi(s)}) = M\left(\lim_{h\to 0,m}\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}\overline{\xi(s)}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} M\left(\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}\overline{\xi(s)}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{M(\xi(t+h)\overline{\xi(s)}) - M(\xi(t)\overline{\xi(s)})}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{B(t+h, s)-B(t, s)}{h} = \frac{\partial B(t, s)}{\partial t}.$$

De asemenea,

$$M(\xi(t)\overline{\xi'(s)}) = \lim_{k\to 0} M\left(\xi(t)\overline{\frac{\xi(s+k)-\xi(s)}{k}}\right) =$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{M(\xi(t)\overline{\xi(s+k)}) - M(\xi(t)\overline{\xi(s)})}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{B(t, s+k)-B(t, s)}{k} = \frac{\partial B(t, s)}{\partial s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog,

$$M'(\xi(t)\,\overline{\xi'(s)}) = \lim_{k\to 0} M\left(\xi'(t)\,\frac{\overline{\xi(s+k)} - \overline{\xi(s)}}{k}\right) =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{M(\xi'(t)\,\xi(s+k)) - M(\xi'(t)\,\overline{\xi(s)})}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\left(\frac{\partial}{\partial t} B(t, s+k) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial t} B(t, s)\right) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} B(t, s).$$

Obținem, evident și

Corolarul 2. *Dacă $\xi'(t)$ există pe T, atunci*

$$B_{\xi'}(t, s) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} B_\xi(t, s);$$

în general,

$$M(\xi^{(n)}(t)\,\xi^{(n')}(s)) = \frac{\partial^{n+n'}}{\partial t^n\,\partial s^{n'}} B(t, s).$$

Un calcul simplu ne dă

Corolarul 3. *O funcție aleatoare $\xi(t)$ este analitică în medie dacă și numai dacă $B(t,s)$ este analitică în orice punct $(t, t) \in T \times T$; în acest caz $B(t,s)$ este analitică pe $T \times T$.*

Teorema 10. *Fie $\xi(t)$ o funcție aleatoare având funcția de corelație $B(t,s)$; condiția necesară și suficientă pentru existența integralei Riemann în medie este existența integralei Riemann duble*

$$\int_T \int_T B(t, s)\, dt\, ds.$$

Într-adevăr, pentru ca $\xi(t)$ să fie integrabilă Riemann în medie, adică

$$\lim_{||\delta||\to 0} M\left(\left|\sum_{j=1}^{p-1} \xi(\tau_j)\,(t_{j+1} - t_j) - \int_T \xi(t)dt\right|^2\right) = 0,$$

în virtutea propoziției 2, cu $\xi_\lambda = \xi_\delta = I(\delta,\tilde{\delta}) = \sum_{j=1}^{p-1} \xi(\tau_j)\,(t_{j+1} - t_j)$, $\xi_{\lambda'} =$

$= \xi_{\delta'} = I(\delta', \tilde{\delta}') = \sum_{k=1}^{q-1} \xi(\tau_k)\,(s_{k+1} - s_k)$, $\xi = I$, (t *fix*), condiția necesară și suficientă este existența limitei

$$\lim_{||\delta||,||\delta'||\to 0} M\left(\sum_{j=1}^{p-1} \xi(\tau_j)\,(t_{j+1} + t_j)\,\overline{\sum_{k=1}^{q-1} \xi(\sigma_k)\,(s_{k+1} - s_k)}\right) =$$

$$= \lim_{||\delta||,||\delta'||\to 0} \sum_{j=1}^{p-1}\sum_{k=1}^{q-1} M(\xi(\tau_j)\,\overline{\xi(\sigma_k)}\,(t_{j+1} - t_j)\,(s_{k+1} - s_k) =$$

$$= \lim_{||\delta||,||\delta'||\to 0} \sum_{j=1}^{p-1}\sum_{k=1}^{q-1} B(\tau_j, \sigma_k)\,(t_{j+1} - t_j)\,(s_{k+1} - s_k) = \int_T \int_T B(t,s)\,dt\,ds.$$

Corolar. Din propoziția 1 rezultă

$$\lim_{\delta|,||\delta'||\to 0} M(I(\delta,\widetilde{\delta}), I(\delta',\widetilde{\delta'})) = \int_T\int_T B(t,s)\,dt\,ds = M\left(\int_T \xi(t)\,dt\cdot\overline{\int_T \xi(t)dt}\right) =$$
$$= M\left(\left|\int_T \xi(t)dt\right|^2\right).$$

În mod analog, putem da

Teorema 11. *Fie $\xi(t)$ și $\eta(t)$ două funcții aleatoare de funcții de corelație $B_\xi(t,s)$ și respectiv $B_\eta(t,s)$ și să presupunem că $\xi(t)$ și creșterea $\Delta\eta(t)$ sînt independente pentru orice $t \in T$ și orice creștere Δ. Condiția necesară și suficientă pentru ca $\xi(t)$ să fie integrabilă Riemann-Stieltjes în medie în raport cu $\eta(t)$ este existența integralei Riemann-Stieltjes duble*

$$\int_T\int_T B_\xi(t,s)\,d^2 B_\eta(t,s).$$

Într-adevăr, cu notațiile din teorema 10, înlocuind pe $I(\delta,\widetilde{\delta})$ cu $I_\eta(\delta,\widetilde{\delta})$, obținem

$$\lim_{||\delta_|||,||\delta'||\to 0} M\left(\sum_{j=1}^{p-1}\xi(\tau_j)\,(\eta(t_{j+1})-\eta(t_j))\overline{\sum_{k=1}^{q-1}\xi(\sigma_k)\,(\eta(s_{k+1})-\eta(s_{k-1}))}\right) =$$

$$= \lim_{||\delta|\|,||\delta'||\to 0}\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{k=1}^{q-1} M\left[\xi(\tau_j)\overline{\xi(\sigma_k)}\,(\eta(t_{j+})-\eta(t)\,\overline{(\eta(s_{k+1})-\eta(s_k))}\right] =$$

$$= \lim_{||\delta||,||\delta'||\to 0}\sum_{j=1}^{p-1}\sum_{k=1}^{q-1} M\left[\xi(\tau_j)\,\overline{\xi(\sigma_k)}\right]\left\{M\left[\eta(t_{j+1})\,\overline{\eta(s_{k+1})}\right] - M\left[\eta(t_{j+1})\,\overline{\eta(s_k)}\right] -\right.$$
$$\left. - M\left[\eta(t)\,\overline{\eta(s_{k+1})}\right] + M\left[\eta(t)\,\overline{\eta(s_k)}\right]\right\} =$$

$$= \lim_{||\delta||,||\delta'||\to 0}\sum_{j=1}^{p-1}\sum_{k=1}^{q-1} B_\xi(\tau_j,\sigma_k)\left\{B_\eta(t_{j+1},s_{k+1}) - B_\eta(t_{j+1},s_k) - B_\eta(t_j,s_{k+1}) +\right.$$
$$\left. + B_\eta(t_j,s_k)\right\} =$$
$$= \int_T\int_T B_\xi(t,s)\,d^2 B_\eta(t,s).$$

Corolar. *Din propoziția 1 rezultă*

$$\lim_{||\delta||,||\delta'||\to 0} M(I_\eta(\delta,\widetilde{\delta})\,I_\eta(\delta',\widetilde{\delta'})) = \int_T\int_T B_\xi(t,s)d^2 B_\eta(t,s) =$$
$$= M\left(\int_T \xi(\iota)d\eta(t)\,\overline{\int_T \xi(t)d\eta(t)}\right) = M\left(\left|\int_T \xi(t)d\eta(t)\right|^2\right).$$

Observații. Rezultatele de mai sus se extind, evident, și la integrale improprii.

3. Funcții aleatoare multidimensionale

Să considerăm o funcție aleatoare n-dimensională

$$\xi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)),$$

unde $\xi_j(t)$, $1 \leqslant j \leqslant n$ sînt funcții aleatoare definite pe T.

O funcție aleatoare n-dimensională este de *ordinul doi*, dacă

$$M(|\xi_j(t)|^2) < \infty \qquad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Să punem atunci

$$B_{j,k}(t,s) = M(\xi_j(t)\overline{\xi_k(s)}) \qquad 1 \leqslant j,k \leqslant n;$$

pentru un cuplu dat $(t,s) \in T \times T$, expresiile $B_{j,k}(t,s)$, $1 \leqslant j,k \leqslant n$ formează o matrice de ordinul n, notată cu $B^{t,s}$ și numită matricea de corelație a lui $\xi(t)$.

Fie $T_n \subset T$ o parte finită a lui T și $h(t)$ o funcție definită pe T_n.

Teorema 12. *Pentru ca $B^{t,s}$ să fie o matrice de corelație este necesar și suficient ca expresia de mai jos să fie o funcție de corelație*

$$B(t,s) = \sum_{u,v \in T_n} B_{u,v}(t,s) h(u) \overline{h(v)}.$$

Într-adevăr, condiția este necesară, deoarece $B(t,s)$ este funcția de corelație a funcției aleatoare

$$\eta(t) = \sum_{u \in T_n} h(u)\, \xi_u(t);$$

condiția este suficientă, deoarece dacă $B(t,s)$ este funcția de corelație a unei funcții aleatoare $\eta(t)$, atunci $\eta(t)$ este în mod necesar o funcție liniară de $h(u)$, $u \in T_n$, adică se poate scrie sub forma

$$\eta(t) = \sum_{u \in T_n} h(u)\, \xi_u(t),$$

unde coeficienții $\xi_u(t)$, $u \in T_n$ sînt funcții aleatoare independente de $h(u)$, $u \in T_n$. Se verifică imediat că funcțiile aleatoare astfel obținute $\xi_u(t)$, $u \in T_n$, formează o funcție aleatoare n-dimensională, admițînd tocmai pe $B^{t,s}$ drept matrice de corelație. Faptul că $B(t, s)$ este de tip pozitiv și hermitian, implică

$$B_{j,k}(t, s) = \overline{B_{k,j}(s, t)}.$$

Într-adevăr,

$$B(t, s) = \sum_{u,v \in T_n} B_{u,v}(t, s)\, h(u)\, \overline{h(v)},$$

$$\overline{B(s, t)} = \sum_{u,v \in T_n} \overline{B_{u,v}(s, t)\, h(u)\, \overline{h(v)}} = \sum_{u,v \in T_n} \overline{B_{v,u}(s, t)}\, h(u)\, \overline{h(v)},$$

de unde relația $B(t, s) = \overline{B(s, t)}$ implică proprietatea cerută.

§ 3. Filtre liniare

1. *R*-filtre

În acest paragraf ne vom ocupa de funcțiile aleatoare $\xi(t)$ de ordinul doi pentru care funcția de corelație se pune sub forma

$$B(t, s) = \int_R \int_R e^{2\pi i(\nu_1 t - \nu_2 s)}\, d^2\, \gamma(\nu_1, \nu_2),$$

iar

$$\int_R \int_R |\, d^2\, \gamma(\nu_1, \nu_2)\,| < k < \infty.$$

Vom numi armonizabilă o astfel de funcție aleatoare și vom nota cu A mulțimea acestor funcții aleatoare armonizabile.

Înainte de a trece mai departe, vom da următoarea

Propoziție. *Dacă $\xi_i(t)$ sînt două funcții aleatoare și dacă*

$$\eta_i(t) = \int_T l_i(t, u)\, \xi_i(u)\, du$$

există (T poate fi și R), atunci

$$M(\eta_1(t)\, \overline{\eta_2(s)}) = \int_T \int_T l_1(t, u)\, M(\xi_1(u)\, \overline{\xi_2(v)})\, \overline{l_2(s, v)}\, du\, dv.$$

Într-adevăr

$$M(\eta_1(t)\, \overline{\eta_2(s)}) = M\left(\int_T l_1(t, u)\, \xi(u)\, du \cdot \overline{\int_T l_2(s, v)\, \xi(v)\, dv}\right) =$$

$$= \lim_{\|\delta\|, \|\delta'\| \to 0} M \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{k=1}^{q-1} l_1(t, \tau_j)\, \xi(\tau_j)\, \overline{l_2(s, \sigma_k)\, \xi(\sigma_k)}\, (t_{j+1} - t_j)\, (s_{k+1} - s_k) =$$

$$= \int_T \int_T l_1(t, u)\, \overline{l_2(s, v)}\, M(\xi_1(u)\, \overline{\xi_2(v)})\, du\, dv.$$

În particular, dacă $\xi_1(t) = \xi_2(t)$, obținem

$$M(\eta_1(t)\, \overline{\eta_2(s)}) = \int_T \int_T l_1(t, u)\, \overline{l_2(s, v)}\, B(u, v)\, du\, dv.$$

Un R-filtru este caracterizat de o funcție $R(t)$ reală sau complexă și absolut integrabilă pe R. R-filtrul este transformarea liniară care duce o funcție aleatoare $\xi(t)$ în

$$\eta(t) = R[\xi(t)] = \int_R R(t - \theta)\, \xi(\theta)\, d\theta \qquad \text{(în medie)}. \quad (1)$$

Existența lui $\eta(t)$ rezultă din faptul că integrala

$$\int_R \int_R B(\theta, \sigma)\, R(t-\theta)\, \overline{R(t-\sigma)}\, d\theta d\sigma$$

există (teorema 10) în virtutea ipotezelor făcute.

Să introducem funcția

$$G(\nu) = \int_R e^{-2\pi i \nu\theta}\, R(\theta)\, d\theta,$$

numită cîștigul filtrului $\left(\frac{1}{G}\right.$ se numește atenuare$\left.\right)$. Sensul fizic al acestei funcții este dat de proprietatea caracteristică cîștigului

$$R[e^{2\pi i \nu t}] = G(\nu)\, e^{2\pi i \nu t}.$$

Într-adevăr,

$$R[e^{2\pi i \nu t}] = \int_R R(t-\theta)\, e^{2\pi i \nu\theta}\, d\theta = -\int_{+\infty}^{-\infty} R(\alpha)\, e^{2\pi i \nu(t-\alpha)}\, d\alpha =$$

$$= \int_R R(\alpha)\, e^{2\pi i \nu t}\, e^{-2\pi i \nu \alpha}\, d\alpha = e^{2\pi i \nu t} \int_R R(\alpha)\, e^{-2\pi i \nu \alpha} d\alpha = G(\nu)\, e^{2\pi i \nu t}.$$

Să considerăm două filtre R_1 și R_2, definite de funcțiile R_1 și R_2; prin suma filtrelor R_1 și R_2 se înțelege un filtru care aplicat unei funcții aleatoare arbitrare $\xi(t)$ ne dă $R_1[\xi(t)] + R_2[\xi(t)]$.

Teorema 1. *Filtrul sumă este definit de* $R_1 + R_2$ *și funcția sa de cîștig este* $G_1 + G_2$.

Într-adevăr, prin definiție

$$(R_1 + R_2)[\xi(t)] = R_1[\xi(t)] + R_2[\xi(t)] = \int_R R_1(t-\theta)\, \xi(\theta)\, d\theta +$$

$$+ \int_R R_2(t-\theta)\, \xi(\theta)\, d\theta = \int_R (R_1(t-\theta) + R_2(t-\theta))\, \xi(\theta)\, d\theta.$$

Din această relație rezultă imediat și proprietatea referitoare la funcția de cîștig.

Fie acum $\lambda \in C$; prin λR se înțelege acel filtru care aplicat unei funcții aleatoare arbitrare $\xi(t)$ dă $\lambda R[\xi(t)]$.

Teorema 2. *Filtrul obținut prin înmulțirea lui* R *cu un scalar* $\lambda \in C$ *este definit de* λR *și funcția sa de cîștig este* λG.

Într-adevăr,

$$(\lambda R)[\xi(t)] = \lambda R[\xi(t)] = \lambda \int_R R(t-\theta)\, \xi(\theta)\, d\theta = \int_R [\lambda R(t-\theta)]\, \xi(\theta)\, d\theta,$$

de unde rezultă imediat și proprietatea referitoare la funcția de cîștig.

Să definim produsul R_1R_2 a două filtre; acest filtru prin definiție, este dat de relația

$$(R_1 \times R_2)\,[\xi(t)] = R_1\,[R_2[\xi(t)]]$$

pentru orice funcție aleatoare $\xi(t)$.

Teorema 3. *Filtrul produs* $(R_1 \times R_2)$ *este definit de funcția* $R_1 * R_2$ *și* $R_1 * R_2 = R_2 * R_1$, *iar funcția sa de cîștig este dată de* $G_1\,G_2$.

Într-adevăr, știm că

$$R_1 * R_2(t) = \int_R R_1(t-\theta)\,R_2(\theta)\,d\theta = \int_R R_2(t-\theta)\,R_1(\theta)\,d\theta = R_2 \times R_1(t).$$

În acest caz

$$\begin{aligned}(R_1 \times R_2)\,[\xi(t)] &= R_1[R_2[\xi(t)]] = \int_R R_1(t-\theta)\,R_2\,[\xi(\theta)]\,d\theta = \\ &= \int_R R_1(t-\theta)\left\{\int_R R_2(\theta-\theta')\,\xi(\theta')\,d\theta'\right\}d\theta = \\ &= \int_R \left\{\int_R R_1(t-\theta)R_2(\theta-\theta')\,d\theta\right\}\xi(\theta')\,d\theta' = \\ &= \int_R \left\{\int_R R_1(t-\theta'-u)\,R_2(u)\,du\right\}\xi(\theta')\,d\theta' = \\ &= \int_R R_1 * R_2(t-\theta')\,\xi(\theta')\,d\theta' = \int_R R_2 * R_1(t-\theta')\,\xi(\theta')\,d\theta' = \\ &= R_2[R_1[\xi(t)]] = (R_2 * R_1)\,[\xi(t)].\end{aligned}$$

Fie acum $G(\nu)$ funcția de cîștig a filtrului $R_1 * R_2$; avem

$$\begin{aligned}G(\nu) &= \int_R e^{-2\pi i\nu\theta}\,R_1 * R_2(\theta)\,d\theta = \int_R e^{-2\pi i\nu\theta}\left\{\int_R R_1(\theta-\theta')\,R_2(\theta')\,d\theta'\right\}d\theta = \\ &= \int_R \left\{\int_R e^{-2\pi i\nu\theta}\,R_1(\theta-\theta')\,d\theta\right\}R_2(\theta')\,d\theta' = \\ &= \int_R \left\{\int_R e^{-2\pi i\nu u}\,e^{-2\pi i\nu(\theta'-u)}\,R_1(\theta'-u)\,du\right\}R_2(\theta')\,d\theta' = \\ &= G_1(\nu)\int_R e^{-2\pi i\nu\theta'}\,R_2(\theta')\,d\theta' = G_1(\nu)\,G_2(\nu).\end{aligned}$$

Vom spune că un filtru este nul dacă el transformă orice funcție într-o funcție identic nulă. Evident, cîștigul unui astfel de filtru este nul.

Vom spune că două filtre sînt disjuncte, dacă

$$G_1(\nu)\cdot G_2(\nu) = 0$$

pentru orice ν. Rezultă că produsul a două filtre disjuncte este un filtru nul. Acest lucru poate fi ilustrat printr-un exemplu din optică: este vorba de

ansamblul a două filtre ale căror domenii de transparență corespund unor regiuni distincte ale spectrului; evident, dacă se suprapun aceste două filtre, se împiedică orice radiație.

Teorema 4. *Transformatele* $\eta_1(t) = R_1[\xi(t)]$ *și* $\eta_2(t) = R_2[\xi(t)]$ *verifică relația*

$$M(\eta_1(t)\,\overline{\eta_2(s)}) = \int_R \int_R G_1(\nu_1)\,\overline{G_2(\nu_2)}\; e^{2\pi i(\nu_1 t - \nu_2 s)}\, d^2\gamma(\nu_1, \nu_2).$$

Într-adevăr, avem

$$\eta_1(t) = \int_R R_1(t-\theta)\,\xi(\theta)\,d\theta,\quad \eta_2(s) = \int_R R_2(s-\theta')\,\xi(\theta')\,d\theta'$$

și din proprietățile integralelor în medie deducem

$$M(\eta_1(t)\,\overline{\eta_2(s)}) = \int_R \int_R R_1(t-\theta)\,\overline{R_2(s-\theta')}\; M(\xi(\theta)\,\overline{\xi(\theta')})\,d\theta\,d\theta'.$$

În virtutea condiției (A), obținem

$$M(\eta_1(t)\,\overline{\eta_2(s)}) =$$

$$= \int_R \int_R R_1(t-\theta)\,R_2(s-\theta')\left\{\int_R \int_R e^{2\pi i(\nu_1\theta - \nu_2\theta')}\, d^2\gamma(\nu_1, \nu_2)\right\} d\theta\,d\theta'.$$

Această integrală multiplă este absolut convergentă, ea fiind majorată de

$$\int_R |R_1(u)|\,du \int_R |\overline{R_2(u)}|\,du \int_R \int_R |d^2\gamma(\nu_1\,\nu_2)|$$

și deci putem schimba ordinea integrării; deducem deci

$$M(\eta_1(t)\,\overline{\eta_2(s)}) = \int_R \int_R e^{2\pi i(\nu_1 t - \nu_2 s)}$$

$$\left\{\int_R \int_R e^{-2\pi i[\nu_1(t-\theta) - \nu_2(s-\theta')]} R_1(t-\theta)\,\overline{R_2(s-\theta')}\,d\theta d\theta'\right\} d^2\gamma(\nu_1, \nu_2) =$$

$$= \int_R \int_R e^{2\pi i(\nu_1 t - \nu_2 s)} \left\{\left[\int_R R_1(t-\theta)\, e^{-2\pi i\nu_1(t-\theta)}\, d\theta\right]\right.$$

$$\left.\left[\int_R \overline{R_2(s-\theta')}\, e^{2\pi i\nu_2(s-\theta')}\, d\theta'\right]\right\} d^2\gamma(\nu_1, \nu_2) =$$

$$= \int_R \int_R G_1(\nu_1)\,\overline{G_2(\nu_2)}\; e^{2\pi i(\nu_1 t - \nu_2 s)}\, d^2\gamma(\nu_1, \nu_2).$$

O b s e r v a ț i e. Conținutul acestei teoreme ar putea fi numit formula interferențelor, pentru a pune în evidență sensul fizic al rezultatului.

Scanned with OKEN Scanner

2. *L*-filtre

Să considerăm o familie de R-filtre $(R_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$; vom spune că șirul R_λ definește, cînd $\lambda \to \lambda_0$, un filtru limită sau L-filtru pe o mulțime E de funcții aleatoare armonizabile, dacă pentru orice funcție aleatoare $\xi\in E$, $R_\lambda[\xi(t)]$ are o limită în medie pentru $\lambda \to \lambda_0$ și vom scrie

$$L[\xi(t)] = \lim_{\lambda\to\lambda_0} R_\lambda[\xi(t)], \quad \xi\in E.$$

Știm însă că condiția necesară și suficientă pentru ca limita de mai sus să existe pentru orice $\xi\in E$ este existența limitei (propoziția 2, §2,2) expresiei $M(R_{\lambda'}[\xi(t)]\, R_{\lambda''}[\xi(t)])$ care este egală (propoziției de mai sus) cu

$$M(R_\lambda[\xi(t)]\,\overline{R_{\lambda'}[\xi(t)]}) = \int_R\int_R R_1(t-\theta)\,\overline{R_2(t-\sigma)}\,B(\theta,\sigma)\,d\theta\,d\sigma =$$

$$= \int_R\int_R R_1(t-\theta)\,\overline{R_2(t-\sigma)}\left\{\int_R\int_R e^{2\pi i(\nu\theta-\nu'\sigma)}\,d^2\gamma(\nu,\nu')\,d\theta\,d\sigma\right. =$$

$$= \int_R\int_R\left\{\int_R\int_R R_1(t-\theta)\,\overline{R_2(t-\sigma)}\,e^{2\pi i(\nu\theta-\nu'\sigma)}\,d\theta d\sigma\right\} d^2\gamma(\nu,\nu') =$$

$$= \int_R\int_R G_\lambda(\nu)\,\overline{G_{\lambda'}(\nu')}\,e^{2\pi i(\nu-\nu')t}\,d^2\gamma(\nu,\nu'),$$

cînd $\lambda, \lambda' \to \lambda_0$ în mod arbitrar. Vom observa că această condiție nu simplifică convergența lui $G_\lambda(\nu)$ către o limită $G_{\lambda_0}(\nu)$ pentru orice ν. Produsul $G_\lambda(\nu)\,G_{\lambda'}(\nu')$ poate, de exemplu, să nu tindă către o limită în interiorul unui domeniu D din planul $(\nu,\ \nu')$, dacă avem

$$\int_D |\,d^2(\nu,\ \nu')\,| = 0.$$

Totuși, în cele ce urmează, vom presupune verificate condițiile

(a) $G_\lambda(\nu) \to G_{\lambda_0}(\nu)$ pentru orice ν;

(b) mulțimea E fiind dată, $G_\lambda(\nu)$ [și limita $G_{\lambda_0}(\nu)$] sînt astfel încît există o funcție $K(\nu) > 0$, astfel încît pentru orice $\xi\in E$, integrala

$$\int_R\int_R K(\nu)\,K(\nu')\,|\,d^2\gamma(\nu,\ \nu')\,|$$

să convergă și astfel încît

$$|\,G_\lambda(\nu)\,| < K(\nu)$$

pentru orice λ.

Existența lui $K(\nu)$ împreună cu condiții de regularitate generale impuse cîștigurilor asigură continuitatea integralelor

$$\int_R\int_R G_\lambda(\nu)\,\overline{G_{\lambda'}(\nu')}\,e^{2\pi i(\nu-\nu')t}\,d\gamma(\nu,\ \nu')$$

cînd cîștigurile converg către limita lor. Natural, dacă este vorba să introducem filtre cu cîștiguri uniform mărginite, putem extinde mulțimea E la

mulțimea A și existența funcției K este imediată; este suficient să luăm o constantă egală cu marginea cîștigurilor.

Un filtru L poate fi un filtru R, dar s-ar putea să nu corespundă la nici o funcție R absolut integrabilă și, prin urmare, să nu posede o definiție de tipul (1). Astfel, așa cum rezultă direct din proprietățile limitelor în medie filtrele L posedă proprietățile fundamentale ale filtrelor R, relația de definiție (1) fiind, în general, exclusă. Avem deci

Teorema 5. *Au loc următoarele proprietăți:*

(a) $L[e^{2\pi i\nu t}] = G(\nu)\, e^{2\pi i\nu t}$;

(b) *lui* $L_1 \times L_2$ *îi corespunde cîștigul* $G_1 G_2$;

(c) *dacă* $\eta_1(t) = L_1[\xi(t)]$, $\eta_2^{(t)} = L_2[\xi(t)]$, *atunci*

$$M(\eta_1(t)\,\overline{\eta_2(s)}) = \int_R \int_R G_1(\nu_1)\,\overline{G_2(\nu_2)}\, e^{2\pi i(\nu_1 t - \nu_2 s)}\, d^2\gamma(\nu_1, \nu_2);$$

(d) *dacă un șir de* L*-filtre posedă cîștigurile* $G_1(\nu)$ *care converg către cîștigul* $G_{i_0}(\nu)$ *în raport cu o mulțime* E *de funcții aleatoare, pentru orice funcție aleatoare* $\xi \in E$ *avem*

$$\lim_{i \to i_0}{}_m L_i[\xi(t)] = L_{i_0}[\xi(t)].$$

Într-adevăr, proprietatea (a) rezultă imediat prin trecere la limită în medie în relația analogă pentru R-filtre. Proprietatea (b) rezultă din (a); proprietățile (c) și (d) rezultă direct din faptul că transformatele $L[\xi(t)]$ sînt definite ca limite în medie.

Evident, operațiile de trecere la limită care ne-au permis să definim L-filtrele pornind de la șiruri de R-filtre pot fi reluate cu șiruri de L-filtre, obținîndu-se astfel alte L-filtre.

Extensiunea care a dus de la R-filtre la L-filtre permite definirea unui filtru prin darea apriori a cîștigului său $G(\nu)$ supus numai la condiții de regularitate ca $G(\nu)$ să poată fi considerat ca limită de cîștiguri de filtre, satisfăcînd condițiile precedente pe E. În cele ce urmează, nu vom mai face distincție între R-filtre L-filtre și le vom nota cu F.

3. Exemple

a. *Filtre trece-bandă.* Vom înțelege prin filtru trece-bandă un filtru definit pe mulțimea A și pentru care

$$G(\nu) = \begin{cases} 0 & , \quad \nu \notin [\nu_1, \nu_2] \\ 1 & , \quad \nu \in [\nu_1, \nu_2]. \end{cases}$$

Este vorba de un filtru cu cîștiguri mărginite, pe care-l vom nota cu F_{ν_1, ν_2}.

Un astfel de filtru poate fi considerat, de exemplu, ca limita pentru $\varepsilon \to 0$ a filtrului R_ε dat de funcția de cîștig

$$G_\varepsilon(\nu) = \begin{cases} 0, & \nu < \nu_1 - \varepsilon \text{ și } \nu > \nu_2, (\nu_1 < \nu_2) \\ \frac{1}{2}\left\{1 + \sin \pi \frac{\nu - (\nu_1 - \varepsilon/2)}{\varepsilon}\right\}, & \nu_1 - \varepsilon \leqslant \nu \leqslant \nu_1 \\ 1, & \nu_1 \leqslant \nu \leqslant \nu_2 - \varepsilon \\ -\frac{1}{2}\left\{-1 + \sin \pi \frac{\nu - (\nu_2 - \varepsilon/2)}{\varepsilon}\right\}, & \nu_2 - \varepsilon \leqslant \nu \leqslant \nu_2. \end{cases}$$

Graficele lui $G_\varepsilon(\nu)$ și $G(\nu)$ sînt (fig. 7)

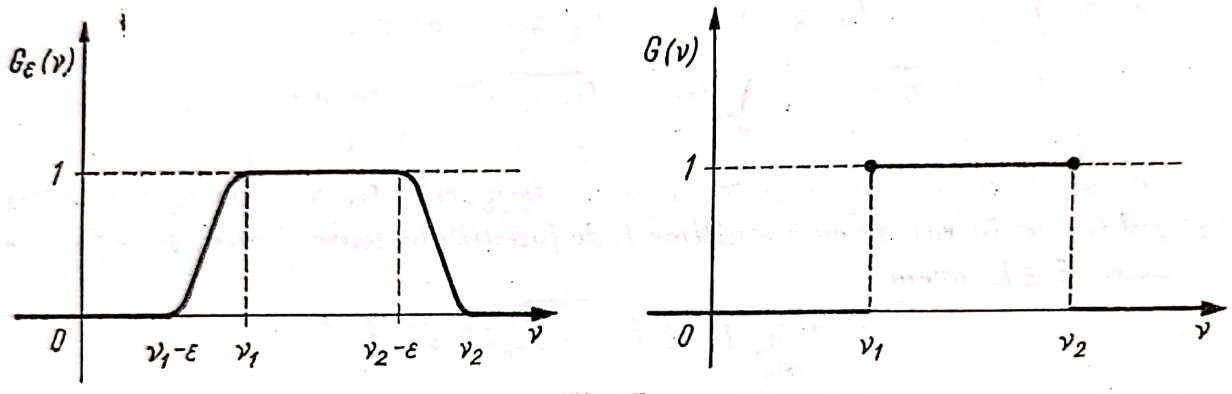

Fig. 7

Funcția $R_\varepsilon(\theta)$, asociată lui R_ε, se deduce din $G_\varepsilon(\nu)$ prin inversiune, adică

$$R_\varepsilon(\theta) = \int_R e^{2\pi i\nu\theta} G_\varepsilon(\nu)\, d\nu.$$

Fără a intra în detalii, $R_\varepsilon(\theta)$ astfel calculat corespunde unui R-filtru, adică este absolut integrabil.

Evident, există o infinitate de șiruri de filtre care prin trecere la limită duc la filtrul F_{ν_1,ν_2}.

Vom aminti însă filtrul care corespunde formulei de inversiune a funcțiilor caracteristice

$$\eta(t) = \int_{-T}^{T} \xi(t-\theta)\, \frac{e^{2\pi i\nu_2\theta} - e^{2\pi i\nu_1\theta}}{2\pi i\theta}\, d\theta,$$

notat cu R_{T,ν_1,ν_2}, căruia îi corespunde funcția

$$R_{T,\nu_1,\nu_2} = \begin{cases} 0 & \theta \notin [-T, T] \\ \dfrac{e^{2\pi i\nu_2\theta} - e^{2\pi i\nu_1\theta}}{2\pi i\theta}, & \theta \in [T_1, T_2], \end{cases}$$

unde cîștigul corespunzător este

$$G_{T,\nu_1,\nu_2}(\nu) = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{T(\nu-\nu_1)} \frac{\sin u}{u}\,du - \int_0^{T(\nu-\nu_2)} \frac{\sin u}{u}\,du\right\}.$$

Pentru T finit suficient de mare, avem pentru G_{T,ν_1,ν_2} o curbă de forma (fig. 8). Această curbă este foarte apropiată de curba (fig. 9) și tinde către ea cînd $T \to \infty$. Pentru T finit, există ondulații în apropierea lui ν_1 și ν_2. Aceste ondulații nu afectează decît domeniile care, practic, se întind asupra lungimilor de undă de ordinul lui $\frac{K\pi}{T}$, unde K este egal cu cîteva unități. La limită avem curba de mai sus. Cu alte cuvinte, avem un filtru care taie toate frecvențele inferioare lui ν_1 și superioare lui ν_2 lasă să treacă frecvențele cuprinse între ν_1 și ν_2 și jumătatea componentelor frecvențelor ν_1 și ν_2.

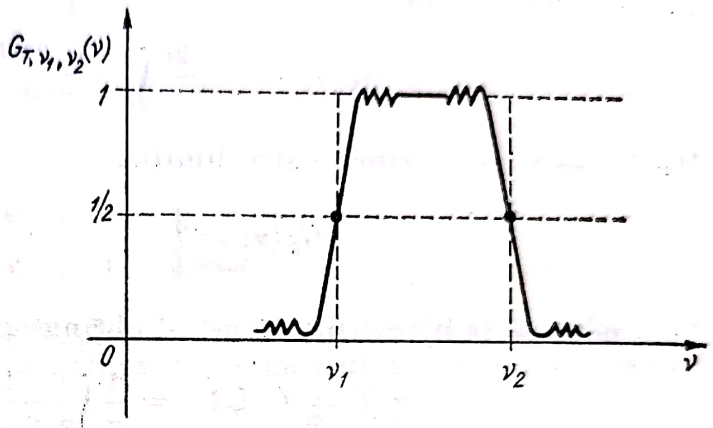

Fig. 8

Un filtru înrudit cu R_{T,ν_1,ν_2} este următorul

$$\eta_{T,\nu_0}(t) = \mathcal{C}_{T,\nu_0}[\xi(t)] = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \xi(t-\theta)\, e^{2\pi i\nu_0\theta}\,d\theta,$$

unde

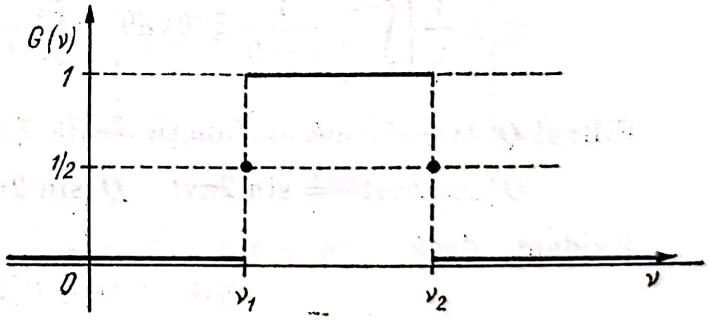

Fig. 9

$$G_{T,\nu_0}(\nu) = \frac{\sin 2\pi(\nu_0-\nu)T}{2\pi(\nu_0-\nu)T}.$$

Pentru $T \to \infty$, $\mathcal{C}_{T,\nu_0}$ tinde către filtrul limită $\mathcal{C}_{\infty,\nu_0}$, a cărui funcție de cîștig este

$$G_{\infty,\nu_0} = \begin{cases} 1, & \nu = \nu_0 \\ 0, & \nu \neq \nu. \end{cases}$$

Astfel de filtre trece-rază, lăsînd să treacă numai frecvența ν_0.

b. *Filtrul Q.* Este un filtru de cîștig mărginit, care operează pe funcțiile aleatoare din A.

Să considerăm deci un șir de R-filtre, definit de funcțiile

$$R_\varepsilon(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\theta}, & \varepsilon < |\theta| < \dfrac{1}{\varepsilon} \\ 0 & |\theta| < \varepsilon \text{ sau } |\theta| > \dfrac{1}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Cîștigul corespunzător este

$$G_\varepsilon(\nu) = -\frac{2i}{\pi}\int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\sin 2\pi\nu\theta}{2\pi\nu\theta}\, 2\pi\nu d\theta.$$

Dacă $\varepsilon \to 0$, $G_\varepsilon(\nu)$ tinde către limita

$$G_0(\nu) = \begin{cases} -i, & \nu > 0 \\ i, & \nu < 0. \end{cases}$$

Vom nota cu Q filtrul limită astfel obținut și vom scrie

$$\eta(t) = Q[\xi(t)] = \frac{1}{\pi}\int_R \frac{1}{t-\theta}\,\xi(\theta)\,d\theta;$$

această integrală este limita în medie a expresiilor

$$\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{-\varepsilon} \frac{1}{t-\theta}\,\xi(\theta)\,d\theta + \int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{t-\theta}\,\xi(\theta)\,d\theta\right\}.$$

Filtrul Q transformă o funcție reală $\xi(t)$ într-o funcție reală; avem

$$Q[\cos 2\pi\nu t] = \sin 2\pi\nu t, \quad Q[\sin 2\pi\nu t] = -\cos 2\pi\nu t.$$

Evident, dacă

$$\eta(t) = Q[\xi(t)],$$

avem

$$\xi(t) = -Q[\eta(t)]$$

și deci cîștigul asociat lui $Q \times Q$ este constant și egal cu -1.

c. *Filtrul identic.* Este filtrul definit de relația

$$I[\xi(t)] = \xi(t)$$

pe mulțimea A; acest filtru poate fi definit cu ajutorul filtrului Q:

$$I = -Q^2.$$

Putem introduce acest filtru și astfel: să considerăm transformarea care face să-i corespundă lui $\xi(t)$, $\eta(t)$ dat de relația

$$\tau\frac{d\eta(t)}{dt} + \eta(t) = \xi(t). \qquad (*)$$

Cu $\eta(t)$ vom nota acea integrală a acestei ecuații care se anulează pentru $t = -\infty$; avem

$$\eta(t) = \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\frac{t-\theta}{\tau}} \xi(\theta)\, d\theta.$$

Această transformare definește un filtru R caracterizat de funcția

$$R(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Cîștigul corespunzător este

$$G(\nu) = \frac{1}{1 + 2\pi i \nu t}.$$

Din punct de vedere fizic, ecuația (*) reprezintă, de exemplu, transformarea unei tensiuni $\xi(t)$ într-o tensiune $\eta(t)$ prin intermediul unui ansamblu capacitate-rezistență (fig. 10). Aici τ este egal cu constanta de timp RC a sistemului. Acest circuit deformează cu atît mai puțin cu cît este mai mic. Dacă $\tau \to 0$, $G(\nu) \to 1$ pentru orice ν și la limită obținem filtrul I.

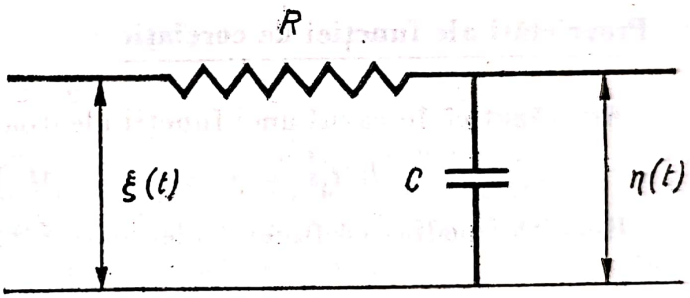

Fig. 10

Observație. 1) Dacă înlocuim ecuația (x) cu următoarea,

$$\tau = \frac{d\eta(t)}{dt} + \eta(t) = \xi(t + \alpha),$$

obținem un filtru $T^{(\alpha)}$, care face să corespundă lui $\xi(t)$ valoarea $\xi(t + \alpha)$. Cîștigul este $e^{2\pi i \nu \alpha}$ și, evident, $I = T^{(0)}$.

Observație. 2) Din considerații asupra cîștigurilor, avem

$$F = \frac{1}{2}[I + iQ] \equiv F_{0,\infty},$$

$$F = \frac{1}{2}[I - iQ] \equiv F_{-\infty,0}.$$

d. *Filtre care derivează.* Derivarea $\xi'(t)$ există dacă $\frac{\xi(t+\alpha) - \xi(t)}{\alpha}$ converge în medie către o limită cînd $\alpha \to 0$. Dar de la $\xi(t)$ la $\frac{\xi(t+\alpha) - \xi(t)}{\alpha}$

trecem cu ajutorul filtrului $\frac{T^{(\alpha)} - 1}{\alpha}$, al cărui cîștig este

$$\frac{e^{2\pi i\nu\alpha} - 1}{\alpha}, \text{ iar}$$

$$\left| \frac{e^{2\pi i\nu\alpha} - 1}{\alpha} \right| \leqslant 2\pi |\nu|.$$

Dacă considerăm mulțimea funcțiilor aleatoare pentru care integrala

$$\iint |\nu| |\nu'| |d^2\gamma(\nu, \nu')|$$

converge, putem defini, cînd $\alpha \to 0$, un filtru limită de cîștig $2\pi i\nu$ care face trecerea de la $\xi(t)$ la derivata sa în medie $\xi'(t)$. De asemenea, am putea introduce filtre care să facă trecerea de la $\xi(t)$ la derivata $\xi^{(n)}(t)$, dacă există. Aceste filtre se notează cu $D^{(n)}$.

§ 4. Funcții aleatoare staționare

1. Proprietăți ale funcției de corelație

Am văzut că în cazul unei funcții aleatoare staționare $\xi(t)$ prin definiție,

$$B(t,s) = C(t - s), \quad M(\xi(t)) = m.$$

Rezultă imediat că funcția aleatoare $\xi(t)$ este staționară, dacă și numai dacă

$$B(t + u, s + u) = B(t, s) \tag{1}$$

pentru orice $u \in R$. Într-adevăr, dacă $\xi(t)$ este o funcție aleatoare staționară

$$B(t + u, s + u) = C(t + u - (s + u)) = C(t - s) = B(t, s).$$

Reciproc, dacă punem

$$C(\tau) = B(\tau, 0)$$

din relația (1) rezultă

$$B(t, s) = B((t - s) + s, s) = B(t - s, 0) = C(t - s).$$

De asemenea, să observăm că din teoremele 1 și 2, § 2, rezultă

(1) $C(\tau) = \overline{C(-\tau)}$;

(2) $|C(\tau)| \leqslant C(0)$.

Într-adevăr,

$$|C(\tau)|^2 = |M(\xi(t)\,\overline{\xi(t - \tau)})|^2 \leqslant M(|\xi(t)|^2)\, M(|\xi(t - \tau)|^2) = C(0)^2;$$

(3) $C(\tau)$ este o funcție de tip pozitiv.

Teorema 1. *Pentru ca o funcție aleatoare staționară* $\xi(t)$ *să fie continuă în medie este necesar și suficient ca partea reală a lui* $C(\tau)$ *să fie continuă în origine.*

Într-adevăr,

$$M(|\xi(t+\tau)-\xi(t)|^2) = M\left([\xi(t+\tau)-\xi(t)]\left[\overline{\xi(t+\tau)}-\overline{\xi(t)}\right]\right) = \\ = 2C(0) - C(\tau) - C(-\tau) = 2Re\,(C(0) - C(\tau)). \tag{2}$$

Se poate deduce chiar că această continuitate poate asigura continuitatea uniformă a funcției $C(\tau)$; pentru aceasta, să observăm că

$$C(\tau+\varepsilon) - C(\tau) = M(\xi(t+\tau)\left[\overline{\xi(t-\tau)} - \overline{\xi(t)}\right])$$

de unde, aplicînd inegalitatea lui Schwarz, rezultă

$$|C(\tau+\varepsilon) - C(\tau)|^2 \leqslant C(0)\, M(|\xi(t) - \xi(t-\varepsilon)|^2)$$

și deci în virtutea lui (2),

$$|C(\tau+\varepsilon) - C(\tau)|^2 \leqslant 2C(0)\, Re\,(C(0) - C(\varepsilon)).$$

Această relație arată că

$$C(\tau+\varepsilon) - C(\tau) \to 0$$

cînd $\varepsilon \to 0$, uniform în raport cu τ.

Într-adevăr, să arătăm mai întîi că $C(\tau)$ este o funcție de tip pozitiv. Să dăm mai întîi o definiție: o funcție continuă $f(t)$, definită pe $T \subset R$, este de *tip pozitiv*, dacă pentru orice mulțime finită $T_n \subset T$ și orice mulțime $h(t)$ definită pe $T_n = \{t_1, \ldots, t_n\}$, avem

$$\sum_{t,s \in T_n} f(t-s)\; h(t)\; \overline{h(s)} \geqslant 0.$$

În cazul nostru

$$\sum_{t,s \in T_n} C(t-s)\; h(t)\; \overline{h(s)} = \sum_{t,s \in T_n} B(t,s)\, h(t)\; \overline{h(s)} \geqslant 0,$$

deoarece $B(t, s)$ este de tip pozitiv.

În cele ce urmează vom presupune că $\xi(t)$ este continuă în medie.

Teorema 2. *Funcția de corelație* $C(\tau)$ *este de forma*

$$C(\tau) = \int_R e^{2\pi i \tau \nu}\, d\gamma(\nu). \tag{3}$$

Deoarece $C(\tau)$ este de tip pozitiv, putem aplica teorema lui Bochner:

$$C(\tau) = \int_R e^{2\pi i \tau \nu}\, dF(\nu),$$

unde *spectrul* $F(\nu)$ este o funcție mărginită nedescrescătoare.

Observație. Dacă $F(\nu)$ admite o derivată $f(\nu)$, ea se numește *densitate spectrală*.

Din teorema 2 rezultă că funcția de corelație este egală cu produsul dintre o funcție caracteristică și o constantă nenegativă.

Vom spune prin definiție că $f \in K$, dacă $f = k\varphi$, unde $K \geqslant 0$ iar φ este o funcție caracteristică; teorema 2 arată deci că $C(\tau) \in K$.

Mai departe, fie $R(t)$ o funcție definită pe R de pătrat integrabil și

$$f(\tau) = \int_R R(\theta)\, \overline{R(\theta - \tau)}\, d\theta;$$

să considerăm mulțimea acestor funcții f și să completăm această mulțime prin închiderea sa în raport cu convergența uniformă pe orice interval finit. Obținem astfel o clasă de funcții notată cu P, adică $f \in P$.

Teorema 3. *Există identitate între funcțiile de corelație staționare, funcțiile de tip pozitiv, funcțiile de clasă K și funcțiile de clasă P.*

a. *Identitatea între funcțiile de corelație și funcțiile de clasă K.*

(α) *Fie*

$$C(\tau) = \int_R e^{2\pi i \nu \tau}\, dF(\nu);$$

această funcție este corelația funcției aleatoare

$$\xi(t) = e^{2\pi i \nu t} A,$$

unde ν este o variabilă aleatoare de repartiție $F(\nu)$ și A — variabila aleatoare independentă de ν, $M(A) = 0$, $M(|A|^2) = 1$.

(β) Reciproc, am văzut deja că orice funcție de corelație este o funcție de clasă K.

b. *Identitatea dintre funcțiile de corelație și funcțiile de tip pozitiv* (α). Am văzut deja că orice funcție de corelație este o funcție de tip pozitiv și, reciproc, (β) orice funcție de tip pozitiv este o funcție de corelație (teorema 2, § 2).

c. *Identitatea dintre funcțiile de corelație și funcțiile de clasă P.*

(α) Orice funcție de clasă P este o funcție de corelație; aceasta rezultă din faptul că orice funcție f de clasă P este continuă și mărginită. În plus,

$$\sum_{t,\, s \in T_n} f(t-s)\, h(t)\, \overline{h(s)} = \sum_{t,\, s \in T_n} \left[\int_R R(\theta)\, \overline{R(\theta - (t-s))}\, d\theta \right] h(t)\, \overline{h(s)} =$$

$$= \int_R \left[\sum_{t \in T_n} R(\theta - t)\, h(t) \right] \left[\sum_{s \in T_n} \overline{R(\theta - s)\, h(s)} \right] d\theta =$$

$$= \int_R \left| \sum_{t \in T_n} R(\theta - t)\, h(t) \right|^2 d\theta \geqslant 0.$$

Rezultă deci că dacă $f \in P$, ea este de tip pozitiv, de unde rezultă că este o funcție de corelație.

Scanned with OKEN Scanner

(β) *Orice funcție de corelație este o funcție de clasă P.* Fie $C(\tau)$ o funcție de corelație; atunci

$$C(\tau) = \int_R e^{2\pi i\tau\nu}\, dF(\nu).$$

Putem considera pe $F(\nu)$ ca limită uniformă, în orice interval finit, de funcții $F_n(\nu)$, cu proprietățile:

(1) $F_n(\nu)$ au proprietățile repartițiilor, afară de $F_n(+\infty) = 1$;

(2) $F_n(\nu) = \int_{-\infty}^{\nu} g_n^2(\theta)\, d\theta$,

unde $g_n(\theta)$ este nenegativă și admite transformata Fourier $R_n(t)$ continuă și de pătrat integrabil.

Fie atunci

$$C_n(\tau) = \int_R e^{2\pi i\nu\tau}\, dF_n(\nu) = \int_R e^{2\pi i\nu\tau}\, g_n^2(\nu)\, d\nu$$

și după teorema lui Parceval

$$C_n(\tau) = \int_R R_n(t)\, \overline{R_n(t-\tau)}\, dt;$$

rezultă deci că $C(\tau) \in P$.

2. Teorema de reprezentare spectrală

Să trecem acum la teorema de reprezentare spectrală.

Teorema 4. *Pentru ca o funcție aleatoare $\xi(t)$ să fie staționară, este necesar și suficient ca*

$$\xi(t) = \int_R e^{2\pi it\nu}\, d\eta(\nu) \tag{4}$$

pentru orice $t \in T = R$, unde η este o funcție aleatoare cu următoarele proprietăți:

(a) *dacă $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \nu_4$, atunci*

$$M[(\eta(\nu_2) - \eta(\nu_1))\,(\eta(\nu_4) - \eta(\nu_3))] = 0;$$

(b) *variațiile funcției de corelație B_η corespunzătoare funcției aleatoare η sînt uniform mărginite pe fiecare interval.*

Într-adevăr, să arătăm mai întîi că orice funcție aleatoare de forma (4) este staționară. În primul rînd, integrala din relația (4) există dacă și numai dacă integrala dublă

$$\int_R \int_R e^{2\pi i(t\nu - s\nu')}\, d^2B_\eta(\nu, \nu'),$$

există.

Dar această integrală există datorită ipotezei (b) de mai sus. De asemenea, această integrală este tocmai funcția de corelație a lui $\xi(t)$, adică

$$B_\xi(t, s) = \int_R \int_R e^{2\pi i(tv - tv')}\, d^2 B_\eta(v, v');$$

într-adevăr,

$$B_\xi(t, s) = M(\xi(t)\,\overline{\xi(s)}) = M\left(\int_R e^{2\pi i t v}\, d\eta(v) \int_R \overline{e^{2\pi i s v'}\, d\eta(v')}\right) =$$

$$= \lim_{\|\delta\|, \|\delta'\| \to 0} M\left(\sum_{j=1}^{p-1} e^{2\pi i \tau_j v}\,(\eta(t_{j+1}) - \eta(t_j))\right)\sum_{k=1}^{q-1} e^{2\pi i \sigma_k v'}\,(\eta(s_{k+1}) - \eta(s_k))\Bigg) =$$

$$= \lim_{\|\delta\|, \|\delta'\| \to 0} \sum_{j=1}^{p-1}\sum_{k=1}^{q-1} e^{2\pi i(\tau_j v - \sigma_k v')} \cdot M[(\eta(t_{j+1}) - \eta(t_j))\,\overline{(\eta(s_{k+1}) - \eta(s_k))}] =$$

$$= \int_R \int_R e^{2\pi i(vt - v's)}\, d^2 B_\eta(v, v').$$

Observăm că trebuia să luăm mai întîi un interval finit $T = [T_1, T_2] \subseteq R$ și apoi să trecem la limită în medie cînd $T_1 \to -\infty$, $T_2 \to \infty$, trecere care nu prezintă nici un fel de dificultăți.

Să analizăm acum elementul diferențial

$$M[(\eta(t_{j+1}) - \eta(t_i))\,(\eta(s_{k+1}) - \eta(s_k))];$$

rezultă că pentru orice punct (t, s) care nu se găsește pe diagonală există un interval bidimensional Δ care conține pe (t, s), astfel încît variația funcției de mai sus pe Δ este nulă.

Însă în acest caz

$$\int_R \int_R e^{2\pi i((t+\tau)v - (s+\tau)v')}\, d^2 B_n(v, v') = \int_R \int_R e^{2\pi i(tv - sv')}\, d^2 B_\eta(v, v'),$$

deoarece

$$e^{2\pi i((t+\tau)v - (s+\tau)v')} = e^{2\pi i(tv - sv')}$$

pentru $v = v'$; deci

$$B_\xi(t + \tau, s + \tau) = B_\xi(t, s),$$

adică $\xi(t)$ este o funcție aleatoare staționară. De asemenea, continuitatea în medie a lui $\xi(t)$ rezultă imediat din reprezentarea inițială.

Să considerăm spațiul $L^2(\Omega, K, P)$ și mulțimea

$$N_2 = \{g;\ M(g) = 0\}.$$

De asemenea, să considerăm spațiul cît $L^2 = \mathfrak{L}_2/N_2$ și pentru orice două elemente $\tilde{f},\ \tilde{g} \in L^2$ să punem

$$< \tilde{f},\ \tilde{g} > = \int_\Omega f(\omega)\, g(\omega)\, dP(\omega);$$

evident, $< \tilde{f}, \tilde{g} >$ este un produs scalar care induce pe L^2 o structură de spațiu Hilbert.

Dacă $\xi(t)$ este o funcție aleatoare staționară continuă în medie, aplicația $t \to \widetilde{\xi(t)}$, notată cu $\tilde{\xi}$, are proprietatea

$$< \tilde{\xi}(t), \tilde{\xi}(s) > = < \tilde{\xi}(t+\tau)\ \tilde{\xi}(s+\tau) >$$

pentru orice τ și este continuă. Dar în acest caz rezultă că există o reprezentare $t \to \eta_t$ a grupului aditiv al lui R în grupul operațiilor unitare ale spațiului L^2 pentru care

$$\eta_t \tilde{\xi}(s) = \tilde{\xi}(t+s) \tag{5}$$

pentru orice t și s; în particular

$$\eta_t \tilde{\xi}(0) = \tilde{\xi}(t).$$

Să revenim la demonstrația teoremei 3 și fie $\tilde{\xi}$ aplicația lui R în L^2 corespunzătoare funcției aleatoare staționare continue din teorema de reprezentare și η_t grupul de operatori unitari care satisfac relația (5). În aceste condiții, există un proiector $P(\nu)$ astfel încît pentru orice ν

$$\eta_t(x) = \int_R e^{it\nu}\, dP(\nu)\ (x)$$

pentru orice $x \in L_2$ și

$$(P(\lambda_2) - P(\lambda_1))\ (P(\lambda_4) - P(\lambda_3)) = 0$$

dacă $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$. În particular, dacă luăm

$$x = \tilde{\xi}(0)$$

și punem

$$\tilde{\nu}(\lambda) = P(\lambda)\ (x),$$

obținem

$$\tilde{\xi}(t) = \int_R e^{it\lambda}\, d\tilde{\nu}\ (\lambda),$$

de unde rezultă tocmai (4).

Deoarece

$$< \tilde{\nu}(\lambda_2) - \tilde{\nu}(\lambda_1),\ \tilde{\nu}(\lambda_4) - \tilde{\nu}(\lambda_3) > = 0,$$

obținem condiția (a); condiția (b) rezultă de asemenea dintr-o simplă verificare.

Scanned with OKEN Scanner

3. Cazul multidimensional

Prin definiție, o funcție aleatoare n-dimensională de ordinul doi $\xi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$ este staționară, dacă

(1) $M(\xi_j(t)) = m_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n;$

(2) $B_{j,k}(t, s) = M(\xi_j(t)\,\overline{\xi_k(s)} = C_{j,k}(t - s).$

După cum am văzut, cazul vectorial se poate reduce la cazul unidimensional prin introducerea funcției aleatoare auxiliare

$$\eta(t) = \sum_{u \in T_n} h(u)\, \xi_u(t).$$

Teorema 5. *Funcția aleatoare $\xi(t)$ este staționară dacă și numai dacă funcția aleatoare $\eta(t)$ este staționară.*

(a) Dacă $\xi(t)$ este staționară, atunci

$$B_\eta(s, t) = M\left(\sum_{u \in T_n} h(u)\, \xi_u(t) \sum_{v \in T_n} \overline{h(v)\, \xi_v(s)}\right) =$$

$$= \sum_{u,\, v \in T_n} M(\xi_u(t)\,\overline{\xi_v(s)})\, h(u)\,\overline{h(v)} = \sum_{u,\, v \in T_n} C_{u,v}(t - s)\, h(u)\,\overline{h(v)} = C_\eta(t - s).$$

(b) Reciproc, dacă $\eta(t)$ este staționară

$$B_\eta(t + \tau, s + \tau) - B_\eta(t, s) \equiv 0,$$

adică

$$B_{u,v}(t + \tau, s + \tau) = B_{u,v}(t, s).$$

De asemenea, teorema 4 se extinde în modul următor:

Teorema 6. *Pentru ca o funcție aleatoare n-dimensională $\xi(t)$ să fie staționară este necesar și suficient ca fiecare componentă $\xi_j(t)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, să îndeplinească condițiile teoremei 4.*

CAPITOLUL IV

PROCESE MARKOV

În acest capitol dăm cîteva noțiuni cu privire la procesele aleatoare de tip Markov. Paragraful 1 este consacrat studiului proceselor depinzînd de un parametru discret. Se definesc mai întîi aceste procese, se dă o teoremă de existență și apoi o teoremă ergodică. Se trece apoi la cazul unei mulțimi continue de stări, dîndu-se o teoremă ergodică. În paragraful 2 se consideră procesele depinzînd de un parametru continuu. Se dau ecuațiile lui A.N. Kolmogorov și W. Feller și apoi se fac cîteva considerații asupra proceselor Poisson. S-a insistat în special asupra aspectului analitic al problemelor, deoarece cel al teoriei măsurii ar fi depășit cadrul acestui curs.

§ 1. Procese Markov depinzînd de un parametru discret

1. Generalități

Să considerăm un proces aleator $\xi(t, \omega)$, definit pe un cîmp de probabilitate $\{\Omega, K, P\}$ și să presupunem că $t \in N$; în acest caz, vom nota procesul cu $\xi_n(\omega)$. Să admitem că fiecare variabilă aleatoare este discretă și să notăm cu I reuniunea tuturor valorilor posibile pe care le pot lua variabilele ξ_n, $n \in N$; evident, I este o mulțime cel mult numerabilă. Prin urmare, $i \in P$ dacă și numai dacă există $n \in N$, astfel încît $P(\xi_n(\omega) = i) > 0$. Mulțimea I constituie mulțimea de stări a procesului considerat.

Definiția 1. Un lanț Markov este un șir de variabile aleatoare $(\xi_n)_{n \in N}$ care se bucură de proprietatea lui Markov, adică pentru orice $n \geqslant 2$, $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$ și orice $i_1, \ldots, i_n \in I$ avem

$$P(\xi_{t_n}(\omega) = i_n \mid \xi_{t_{n-1}}(\omega) = i_{n-1}, \ldots, \xi_{t_1}(\omega) = i_1) =$$
$$= P(\xi_{t_n}(\omega) = i_n \mid \xi_{t_{n-1}}(\omega) = i_{n-1}) \tag{1}$$

ori de cîte ori membrul stîng este definit.

Se poate demonstra imediat că condiția (1) este echivalentă cu următoarea condiție, aparent mai simplă: pentru $n \geqslant 1$

$$P(\xi_n(\omega) = i_n \mid \xi_{n-1}(\omega) = i_{n-1}, \ldots, \xi_0(\omega) = i_0) = \\ = P(\xi_n(\omega) = i_n \mid \xi_{n-1}(\omega) = i_{n-1}).$$

O consecință importantă a relației (1) este că pentru orice $n \geqslant 0$ și $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n < \ldots < t_{n+m}$ și orice $i_1, \ldots, i_n, \ldots, i_{n+m} \in I$, avem

$$P(\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n \leqslant \nu \leqslant n+m \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant n-1) = \\ = P(\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n \leqslant \nu \leqslant n+m \mid \xi_{t_{n-1}}(\omega) = i_{n-1}). \tag{2}$$

Demonstrația relației (2) se face prin inducție asupra lui m. Pentru $m = 0$, relația (2) se reduce la (1). Presupunînd că (2) are loc pentru o anumită valoare a lui m, obținem din (1) și din proprietățile probabilităților condiționate

$$P(\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n \leqslant \nu \leqslant n+m+1 \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ l \leqslant \nu \leqslant n-1) = \\ = P(\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n \leqslant \nu \leqslant n+m \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant n-1) \times \\ \times P(\xi_{t_{n+m+1}}(\omega) = i_{n+m+1} \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant n+m) = \\ = P(\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n \leqslant \nu \leqslant n+m \mid \xi_{t_{n-1}}(\omega) = i_{n-1}) \times \\ \times P(\xi_{t_{n+m+1}}(\omega) = i_{n+m+1} \mid \xi_{t_{n+m}}(\omega) = i_{n+m}) = \\ = P(\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n \leqslant \nu \leqslant n+m \mid \xi_{t_{n-1}}(\omega) = i_{n-1}) \times \\ \times P(\xi_{t_{n+m+1}}(\omega) = i_{n+m+1} \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n-1 \leqslant \nu \leqslant n+m) = \\ = P(\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n \leqslant \nu \leqslant n+m+1 \mid \xi_{t_{n-1}}(\omega) = i_{n-1}).$$

Rezultă deci că relația (2) rămîne valabilă dacă înlocuim pe m cu $m+1$, ceea ce demonstrează afirmația făcută.

Ținînd seama de unele rezultate din teoria măsurii, putem afirma că valabilitatea relației (2) pentru orice m implică următorul rezultat mult mai general: pentru orice $M \in K(\xi_t,\ t \geqslant t_n)$ avem

$$P(M \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\quad 1 \leqslant \nu \leqslant n) = P(M \mid \xi_{t_n}(\omega) = i_n);$$

aici $K(\xi_t,\ t \geqslant t_n)$ este corpul borelian generat de variabilele aleatoare $\xi_t,\ t \geqslant t_n$.

2. Probabilități de trecere

Să considerăm un cîmp de probabilitate $\{\Omega, K, P\}$ și un șir de variabile aleatoare $(\xi_n)_{n \in N}$, definite pe el. Corpul borelian generat de variabilele aleatoare ale șirului îl vom nota cu K_0; el este, în general, un subcorp al lui K. În cazul în care toate variabilele șirului sînt discrete cu mulțimea de stări I, probabilitățile pe toate mulțimile din K_0 sînt complet determinate de probabilitățile finit-dimensionale

$$P(\xi_n(\omega) = i_n, \ldots, \xi_0(\omega) = i_0) \tag{4}$$

pentru orice $n \in N$ și $i_1, \ldots, i_n \in I$. Această probabilitate poate fi exprimată sub forma următorului produs de probabilități condiționate

$$P(\xi_0(\omega) = i_0) \prod_{t=1}^{n} P(\xi_t(\omega) = i_t \mid \xi_s(\omega) = i_s,\ 0 \leqslant s < t),$$

relație valabilă pentru orice proces aleator discret $(\xi_n)_{n \in N}$ cu mulțimea de stări I. Dacă acum procesul considerat este un lanț Markov, atunci probabilitățile condiționate care intervin în relația de mai sus sînt de forma *probabilităților de trecere*

$$P(\xi_t(\omega) = i_t \mid \xi_{t-1}(\omega) = i_{t-1}) = p(t; i_{t-1}, i_t), \quad 1 \leqslant t \leqslant n,$$

adică sub forma unor funcții de t, i_{t-1} și i_t.

Dacă punem în evidență *repartiția inițială*

$$P(\xi_0(\omega) = i) = p_i, \qquad i \in I,$$

atunci

$$P(\xi_t(\omega) = i_t, \quad 0 \leqslant t \leqslant n) = p_{i_0} \prod_{t=1}^{n} p(t; i_{t-1}, i_t). \tag{5}$$

Definiția 2. Un lanț Markov este *staționar*, dacă funcția $p(t; t_{t-1}, i_t)$ nu depinde explicit de t, adică

$$p(t; i_{t-1}, i_t) = p_{i_{t-1} i_t}.$$

În cazul staționar, (5) devine

$$P(\xi_t(\omega) = i_t,\ 0 \leqslant t \leqslant n) = p_{i_0} \prod_{t=1}^{n} p_{i_{t-1} i_t}; \tag{6}$$

vom nota cu $\Pi = (p_{ij})_{i,\, j \in I}$ matricea probabilităților de trecere (pe scurt, matricea de trecere).

Probabilitățile inițiale și de trecere ale unui lanț Markov verifică, evident, următoarele relații

$$\begin{cases} p_i \geqslant 0, & \sum_{i \in I} p_i = 1, \\ p_{ij} \geqslant 0, & \sum_{j \in I} p_{ij} = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Am văzut că aceste probabilități determină toate probabilitățile (4) și, prin urmare, determină probabilitatea P pe corpul borelian K° generat de lanțul Markov considerat. În acest sens probabilitățile inițiale și de trecere formează o familie de cantități determinante pentru un lanț Markov. Următoarea variantă de definiție pentru un lanț Markov se folosește adesea: este un proces aleator $(\xi_n)_{n \in N}$ cu variabile aleatoare discrete pentru care există o mulțime de indici cel mult numărabilă I, un șir $(p_i)_{i \in I}$ și o matrice $(p_{ij})_{i,\, j \in I}$, verificînd condițiile (7) astfel ca probabilitățile finit-dimensionale (4) să fie date de (5).

Observație. Un caz special important de lanț Markov staționar se obține cînd

$$p_{ij} = q_{j-i}, \qquad i, j \in I.$$

Avem de-a face atunci cu un *lanț cu creșteri independente*. Să definim un șir de variabile aleatoare $(\eta_n)_{n\in N}$ astfel

$$\eta_0 = \xi_0, \qquad \eta_n = \xi_n - \xi_{n-1}, \qquad n \geqslant 1.$$

Fie K mulțimea numărabilă de numere reale de forma $j - i$, cu $i, j \in I$, astfel încît $p_{ij} > 0$. Atunci K este mulțimea valorilor posibile corespunzătoare șirului $(\eta_n)_{n\in N}$. Fie J mulțimea valorilor lui η_0. Pentru orice $n \geqslant 1$, $j_0 \in J$ și $j_\nu \in K$, $1 \leqslant \nu \leqslant n$, avem

$$P(\eta_n(\omega) = j_n \mid \eta_\nu(\omega) = j_\nu,\ 0 \leqslant \nu < n) =$$

$$= P\left(\xi_n(\omega) = \sum_{s=0}^{n} j_s \mid \xi_\nu(\omega) = \sum_{s=0}^{\nu} j_s,\ 0 \leqslant \nu < n\right) =$$

$$= P\left(\xi_n(\omega) = \sum_{s=0}^{n} j_s \mid \xi_{n-1}(\omega) = \sum_{s=0}^{n-1} j_s\right) = q_{j_n}.$$

De aici rezultă că procesul $(\eta_n)_{n\in N}$ este un șir de variabile aleatoare independente, toate, afară de η_0, avînd o repartiție comună dată de $(q_k)_{k\in K}$. Prin urmare,

$$\xi_n = \sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu$$

este suma a $n + 1$ variabile aleatoare discrete independente, toate, afară de η_0, avînd aceeași repartiție. Reciproc, un astfel de proces $(\xi_n)_{n\in N}$ este un lanț cu creșteri independente.

3. O teoremă de existență

Să dăm acum următoarea teoremă de existență:

Teorema 1. *Fie I o mulțime cel mult numărabilă, $(p_i)_{i\in I}$ un șir și $(p_{ij})_{i,j\in I}$ o matrice verificînd condițiile (7). Există atunci un cîmp de probabilitate $\{\Omega, K, P\}$ și un lanț Markov $(\xi_n)_{n\in N}$ definit pe el cu mulțimea de stări I, repartiția inițială $(p_i)_{i\in I}$ și matricea de trecere $(p_{ij})_{i,j\in I}$.*

Demonstrație. Drept Ω luăm mulțimea șirurilor $(x_n)_{n\in N}$ de elemente din I. Fiind dat $m \geqslant 0$ și orice $i_0, \ldots, i_m \in I$, vom nota mulțimea șirurilor $(x_n)_{n\in N}$ pentru care $x_\nu = i_\nu$, $0 \leqslant \nu \leqslant m$, cu $C(i_0, \ldots, i_m)$ și o vom numi *mulțime cilindrică*. Drept K luăm corpul borelian generat de mulțimile cilindrice. Pe mulțimea părților cilindrice definim o funcție de mulțime P prin relația

$$P(C(i_0, \ldots, i_n)) = p_{i_0} \prod_{l=1}^{n} p_{i_{l-1} i_l}.$$

Se știe că această funcție de mulțime P se poate extinde la o probabilitate pe K, dacă ținem seama de condițiile (7); vom lua această funcție drept probabilitate P. Vom defini acum un șir de variabile aleatoare $(\xi_n)_{n\in N}$ astfel

$$\xi_n(\omega) = x_n, \qquad n \in N,$$

dacă $\omega = (x_n)_{n\in N} \in \Omega$. Să verificăm că acest proces este un lanț Markov cu repartiția inițială $(p_i)_{i\in I}$ și matricea de trecere $(p_{ij})_{i,j\in I}$. Prin definiție, avem

$$P(\xi_0(\omega) = i) = P(C(i)) = p_i;$$

dacă acum $P(\xi_n(\omega) = i) > 0$, atunci

$$P(\xi_{n+1}(\omega) = j \mid \xi_n(\omega) = i) = \frac{P(\xi_{n+1}(\omega) = j,\ \xi_n(\omega) = i)}{P(\xi_n(\omega) = i)} =$$

$$\frac{P\left(\bigcup_{i_0,\ldots,i_{n-1}\in I} C(i_0,\ldots,i_{n-1},i,j)\right)}{P\left(\bigcup_{i_0,\ldots,i_{n-1}\in I} C(i_0,\ldots,i_{n-1},i)\right)} = \frac{\sum_{i_0,\ldots,i_{n-1}\in I} p_{i_0}p_{i_0i_1}\cdots p_{i_{n-1}}p_{i_j}}{\sum_{i_0,\ldots,i_{n-1}\in I} p_{i_0}p_{i_0i_1}\cdots p_{i_{n-1}i}} = p_{ij}.$$

Rămîne de arătat că $(\xi_n)_{n\in N}$ este un lanț Markov. Într-adevăr, dacă $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$, atunci

$$P(\xi_{t_n}(\omega) = i_{t_n} \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_{t_\nu},\ 1 \leqslant \nu \leqslant n-1) =$$

$$= \frac{\sum_{j_{t_\nu}=i_{t_\nu},\ 1\leqslant\nu\leqslant n} \prod_{s=1}^{t_n} p_{j_{s-1}j_s}}{\sum_{j_{t_\nu}=i_{t_\nu},\ 1\leqslant\nu\leqslant n-1} \prod_{s=1}^{t_{n-1}} p_{j_{s-1}j_s}} = \sum_{\substack{j_{t_\nu}=i_{t_\nu}\\ \nu=n-1,n}} \prod_{s=t_{n-1}+1}^{t_n} p_{j_{s-1}j_s} =$$

$$= \frac{\sum_{j_{t_\nu}=i_{t_\nu},\ 1\leqslant\nu\leqslant n} \prod_{s=1}^{t_n} p_{j_{s-1}j_s}}{\sum_{j_{t_{n-1}}=i_{t_{n-1}}} \prod_{s=1}^{t_{n-1}} p_{j_{s-1}j_s}} = P(\xi_n(\omega) = i_n \mid \xi_{n-1}(\omega) = i_{n-1});$$

prin urmare, relația (1) are loc și deci teorema este demonstrată.

Observație. O teoremă de existență analogă este valabilă și în cazul nestaționar, adică atunci cînd relația (6) nu are loc.

4. Probabilități de trecere, după n pași

Să introducem acum *probabilitățile de trecere după n pași* $p_{ij}^{(n)}$. Vom pune mai întîi

$$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } i \neq j, \\ 1, & \text{dacă } i = j. \end{cases}$$

Mai departe, punem $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$ și definim mărimile $p_{ij}^{(n)}$ succesiv pentru $n \geqslant 1$ prin relația

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(1)}. \tag{8}$$

Această relație este valabilă pentru $n = 0$. Să arătăm acum că pentru fiecare $\nu \geqslant 0$,

$$p_{ij}^{(n)} = P(\xi_{n+\nu}(\omega) = j \mid \xi_\nu(\omega) = i), \tag{9}$$

justificînd astfel termenul de probabilitate de trecere după n pași. Pentru $n = 1$, relația (9) se reduce la (6). Presupunînd acum că (9) are loc pentru o anumită valoare a lui n și pentru orice $i, j \in I$, avem, din proprietatea lui Markov,

$$P(\xi_{\nu+n+1}(\omega) = j \mid \xi_\nu(\omega) = i) =$$

$$= \sum_{k \in I} P(\xi_{\nu+n}(\omega) = k,\ \xi_{\nu+n+1}(\omega) = j \mid \xi_\nu(\omega) = i) =$$

$$= \sum_{k \in I} P(\xi_{\nu+n}(\omega) = k \mid \xi_\nu(\omega) = i) P(\xi_{\nu+n+1}(\omega) = j \mid \xi_\nu(\omega) = i, \xi_{\nu+n}(\omega) = k) =$$

$$= \sum_{k \in I} P(\xi_{\nu+n}(\omega) = k \mid \xi_\nu(\omega) = i) P(\xi_{\nu+n+1}(\omega) = j \mid \xi_{\nu+n}(\omega) = k) =$$

$$= \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(1)} = p_{ij}^{(n+1)};$$

cu alte cuvinte, relația (9) este demonstrată prin inducție asupra lui n.

Probabilitatea absolută a lui ξ_n este dată de relația

$$p_i^{(n)} = P(\xi_n(\omega) = i) = \sum_{j \in I} p_j p_{ji}^{(n)}, \quad n \in N, \quad i \in I.$$

Ecuația (8) poate fi generalizată în modul următor: pentru $n, m \in N$,

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}. \tag{10}$$

Pentru $m = 0$ această relație este banală. Presupunînd că relația (10) este adevărată pentru o valoare a lui m și pentru orice n, i, j, avem

$$p_{ij}^{(n+m+1)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n+m)} p_{kj}^{(1)} = \sum_{k \in I} \left(\sum_{l \in I} p_{il}^{(n)} p_{lk}^{(m)} \right) p_{kj}^{(1)} =$$

$$= \sum_{l \in I} p_{il}^{(n)} \left(\sum_{k \in I} p_{lk}^{(m)} p_{kj}^{(1)} \right) = \sum_{l \in I} p_{il}^{(n)} p_{lj}^{(m+1)};$$

prin urmare, relația (10) este demonstrată prin inducție asupra lui m.

Relația (8) și generalizarea ei (10), cunoscute sub numele de *relațiile lui Chapman-Kolmogorov*, sugerează folosirea matricelor. O *matrice stochastică* este o matrice ordin finit sau numărabil cu elemente nenegative, astfel încît suma elementelor de fiecare linie să fie 1. Dacă $A = (a_{ij})_{i,\, j \in I}$

și $B = (b_{ij})_{i,j\in I}$ sînt matrice stochastice, produsul lor $C = AB$ este definit de matricea $C = (c_{ij})_{i,j\in I}$, unde

$$c_{ij} = \sum_{k\in I} a_{ik}\ b_{kj}.$$

Această serie converge întotdeauna și este ușor de verificat că AB este întotdeauna o matrice stochastică. Observăm că matricea de trecere a unui lanț Markov este, evident, o matrice stochastică și teorema 1 implică, reciproc, că orice matrice stochastică este matricea de trecere a unui lanț Markov cu o repartiție inițială dată. Relația (8) echivalentă cu afirmația că matricea de trecere după n pași $\pi^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})$ $i,\ j \in I$ este puterea a n—a a matricei de trecere, adică

$$\pi^{(n)} = (\pi)^n.$$

5. O teoremă ergodică

Să studiem acum comportarea asimptotică a probabilităților de trecere după n pași. Ne vom limita la acest punct în cazul cînd I este o mulțime finită. Are loc

Teorema 2. *Șirul* $(p_{ij}^{(n)})_{n\in N^*}$ *converge către o limită* p_j^{∞}, $j\in I$, *oricare ar fi* $i\in I$, *cînd* $n\to\infty$, *dacă și numai dacă există un număr* $s>0$ *și o stare* $h\in I$, *astfel încît* $p_{jh}^{(s)} > 0$ *pentru* $j\in I$.

Demonstrație. Condiția este necesară. Într-adevăr, din relațiile

$$p_j^{\infty} = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)},$$

deducem imediat că

$$\sum_{j\in I} p_j^{\infty} = 1.$$

Există atunci un $h\in I$ pentru care $p_h^{\infty} > 0$. Dar atunci $p_{jh}^{(s)} > 0$ pentru orice j, dacă s este suficient de mare.

Demonstrație. Condiția este suficientă. Să considerăm mai întîi șirurile $(\bar{p}_j^{(n)})_{n\in N}$ și $(\underline{p}_j^{(n)})$, $n\in N$ pentru orice $j\in I$, unde

$$\bar{p}_j^{(n)} = \sup_{i\in I} p_{ij}^{(n)}, \qquad \underline{p}_j^{(n)} = \inf_{i\in I} p_{ij}^{(n)}.$$

Să arătăm, de exemplu, că primul șir este monoton descrescător; avem, după relația (8),

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k\in I} p_{ik}^{(1)}\, p_{kj}^{(n)} \leqslant \bar{p}_j^{(n)} \sum_{k\in I} p_{ik}^{(1)} = \bar{p}_j^{(n)}$$

pentru orice $i,\ j\in I$ prin urmare

$$\bar{p}_j^{(n+1)} \leqslant \bar{p}_j^{(n)}.$$

în mod analog se poate arăta că al doilea este monoton crescător. Dar

$$0 \leqslant \bar{p}^{(n)}, \qquad \underline{p}^{(n)} \leqslant 1;$$

rezultă atunci că șirurile de mai sus fiind monotone și mărginite, ele converg respectiv către limite bine determinate $\bar{p}_j^{\infty}$ și $\underline{p}_j^{\infty}$. Dacă acum

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i,l\in I} | p_{ij}^{(n)} - p_{lj}^{(n)} | = 0,$$

atunci

$$p_j^{\infty} = \bar{p}_j^{\infty} = \underline{p}_j^{\infty}, \qquad j \in I.$$

Rămîne deci să evaluăm maximul diferenței $p_{ij}^{(n)} - p_{lj}^{(n)}$ $i, j, l \in I$. Să presupunem că $n > s$; după formula (10), avem

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{r\in I} p_{lr}^{(s)} p_{rj}^{(n-s)}$$

și deci

$$p_{ij}^{(n)} - p_{lj}^{(n)} = \sum_{r\in I} p_{ir}^{(s)} p_{rj}^{(n-s)} - \sum_{r\in I} p_{lr}^{(s)} p_{rj}^{(n-s)} =$$

$$= \sum_{r\in I} (p_{ir}^{(s)} - p_{lr}^{(s)}) p_{rj}^{(n-s)} = \sum_{r\in I} u_{il}(r) p_{rj}^{(n-s)}, \tag{11}$$

unde

$$u_{il}(r) = p_{ir}^{(s)} - p_{lr}^{(s)}.$$

Să notăm acum cu I^+ mulțimea acelor indici $r \in I$ pentru care $u_{il}(r) > 0$ și cu I^- mulțimea acelor indici $r \in I$ pentru care $u_{il}(r) \leqslant 0$; evident, $I = I^+ \cup I^-$. Atunci, deoarece

$$\sum_{r\in I} p_{ir}^{(s)} = \sum_{r\in I} p_{lr}^{(s)} = 1,$$

rezultă că

$$\sum_{r\in I} (p_{ir}^{(s)} - p_{lr}^{(s)}) = \sum_{r\in I^+} u_{il}(r) + \sum_{r\in I^-} u_{il}(r) = 0,$$

adică

$$v_{il} = \sum_{r\in I^+} u_{il}(r) = \sum_{r\in I^-} | u_{il}(r) |.$$

Să arătăm că $0 \leqslant v_{il} < 1$. Să presupunem, de exemplu, că indicele h care apare în enunțul teoremei aparține lui I^+; atunci

$$v_{il} = \sum_{r\in I^+} u_{il}(r) \leqslant 1 - \sum_{r\in I^+} p_{lr}^{(s)} \leqslant 1 - \sum_{r\in I^+} \underline{p}_r^{(s)} \leqslant 1 - \underline{p}_h^{(s)}.$$

În mod analog, dacă $h \in I^-$, obținem aceeași evaluare; deci, în general,

$$0 \leqslant v_{il} \leqslant 1 - p_h^{(s)} < 1,$$

deoarece

$$\underline{p}_h = \inf_{j \in I} p_{jh}^{(s)} > 0.$$

Fie

$$v = \sup_{i,j \in I} v_{ij};$$

deoarece I este o mulțime finită, deducem imediat că

$$0 \leqslant v < 1. \tag{12}$$

Continuînd evaluările începute în (11), obținem, pentru $v_{il} > 0$ (dacă $v_{il} = 0$, rezultatul este imediat)

$$|p_{ij}^{(n)} - p_{lj}^{(n)}| = |\sum_{r \in I^+} u_{il}(r)\, p_{rj}^{(n-s)} - \sum_{r \in I^-} u_{il}(r)\, p_{rj}^{(n-s)}| \leqslant$$

$$\leqslant v_{il}(\bar{p}_j^{(n-s)} - \underline{p}_j^{(n-s)}) \leqslant v(\bar{p}_j^{(n-s)} - \underline{p}_j^{(n-s)}),$$

de unde deducem

$$\bar{p}_j^{(n)} - \underline{p}_j^{(n)} \leqslant v(\bar{p}_j^{(n-s)} - \underline{p}_j^{(n-s)}),$$

sau aplicînd această relație de $\left[\frac{n}{s}\right]$ ori (aici $[x]$ este cel mai mare întreg cuprins în x), obținem

$$0 \leqslant \bar{p}_j^{(n)} - \underline{p}_j^{(n)} \leqslant v^{\left[\frac{n}{s}\right]}\left(\bar{p}_j^{\left(n-\left[\frac{n}{s}\right]s\right)} - \underline{p}_j^{\left(n-\left[\frac{n}{s}\right]s\right)}\right) \leqslant v^{\left[\frac{n}{s}\right]},$$

deoarece întotdeauna

$$\bar{p}_j^{(m)} - \underline{p}_j^{(m)} \leqslant 1.$$

Rezultă atunci că

$$\sup_{i,l \in I} |p_{ij}^{(n)} - p_{lj}^{(n)}| \leqslant v^{\left[\frac{n}{s}\right]}$$

și deci cînd $n \to \infty$, de asemenea $\left[\frac{n}{s}\right] \to \infty$, relația (12) implică

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{i,l \in I} |p_{ij}^{(n)} - p_{lj}^{(n)}| = 0,$$

adică

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = p_j^{\infty}, \qquad j \in I$$

oricare ar fi $i \in I$. Din cele arătate, rezultă

$$\sum_{j \in I} p_j^{\infty} = \lim_{n \to \infty} \sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \to \infty} 1 = 1.$$

Cu aceasta, teorema 2 este complet demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Din demonstrație rezultă că există două constante pozitive M și μ, astfel încît

$$\sup_{i,j\in I} | p_{ij}^{(n)} - p_j^{\infty} | \leqslant \frac{M}{(1+\mu)^n}.$$

Corolarul 1. *Are loc relația*

$$\sum_{j\in I} p_j^{\infty} p_{jk}^{(m)} = p_k^{\infty}, \qquad k\in I,$$

pentru orice $m\in N$.

Demonstrație. Într-adevăr,

$$\sum_{j\in I} p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} = p_{ik}^{(n+m)}.$$

Dacă facem $n \to \infty$, obținem tocmai rezultatul dorit.

Corolarul 2. *Avem* $p_j^{\infty} > 0$, $j\in I$ *dacă și numai dacă de la un* s *suficient de mare elementele matricei* $\pi^{(s)}$ *sînt toate strict pozitive.*

Corolarul 3. *Avem* $p_j^{\infty} = \frac{1}{m}$, $j\in I$, *dacă și numai dacă*

$$\sum_{i\in I} p_{ij}^{(1)} = 1 \tag{13}$$

pentru orice $j\in I$, *unde* m *este numărul de elemente din* I.

Demonstrație. Din condiția (13) rezultă imediat

$$\sum_{i\in I} p_{ij}^{(n)} = 1, \qquad n > 1$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i\in I} p_{ij}^{(n)} = m p_j^{\infty} = 1,$$

adică

$$p_j^{\infty} = \frac{1}{m}, \qquad j\in I.$$

Reciproc, dacă

$$p_j^{\infty} = \frac{1}{m}, \qquad j\in I, \tag{14}$$

atunci, din corolarul 1, deducem

$$\sum_{i\in I} p_i^{\infty} p_{ij}^{(1)} = p_j^{\infty}$$

și, ținînd seama de (14), obținem tocmai relația (13).

Scanned with OKEN Scanner

6. Extensiunea la o mulțime arbitrară de stări

Fie $X \subset R$ o parte oarecare a lui R^* și F_X un corp borelian de părți ale lui X. Folosind analogia cu cele spuse la punctul 2, vom spune că un lanț Markov este un proces aleator cu variabile aleatoare reale, pentru care există o mulțime X, din care iau valori aceste variabile aleatoare, o probabilitate inițială $p(A)$ definită pe F_X și o familie de probabilități de trecere $(p_n(x, A))_{n\in N^*}$ definite pe $X \times F_X$, cu următoarele proprietăți:

(1) $p_n(x, A)$ este o funcție măsurabilă pentru orice $A \in F_X$ și $n \in N^*$ ficși;

(2) $p_n(x, A)$ este o probabilitate pe F_X pentru orice $x \in R$ și $n \in N^*$ ficși.

În cazul staționar, $p_n(x, A)$ nu depinde explicit de n.

Construcția următoare reprezintă extensiunea naturală a celor expuse la punctul 3.

Drept Ω luăm spațiul șirurilor $\omega = (x)_{n,\, n\in N}$, unde $x_n \in X$, $n \in N$. Pe Ω se poate defini o probabilitate în modul următor. Fie

$$\xi_n(\omega) = x_n, \qquad n \in N,$$

dacă $\omega = (x_n)_{n\in N}$. Să punem

$$P(\xi_0(\omega) \in A_0) = p(A_0),$$

și

$$P(\xi(\omega) \in A_\nu, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant n) =$$

$$= \int_{A_1} p(dx_1) \int_{A_2} p(x_1, dx_2) \ldots \int_{A_n} p(x_{n-1}, dx_n)$$

pentru orice $A_j \in F_X$, $0 \leqslant j \leqslant n$. Aceste relații definesc o probabilitate pe mulțimile din K, unde K este corpul borelian generat de mulțimile de puncte ω de forma

$$\{f_j(\omega) \in A\}, \quad j \geqslant 1, \quad A \in F_X.$$

Rezultă deci că mulțimea X, probabilitatea inițială $p(A)$ și probabilitatea de trecere $p(x, A)$ caracterizează complet lanțul Markov $(\xi_n)_{n\in N}$.

Fără dificultate se pot calcula și probabilitățile de trecere după n pași. Să punem mai întîi

$$p^{(0)}(x, A) = \delta(x, A) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A, \\ 0, & \text{dacă } x \notin A. \end{cases} \tag{15}$$

Mai departe, fie

$$p^{(1)}(x, A) = p(x, A),$$

$$p^{(n+1)}(x, A) = \int_X p^{(n)}(y, A)\, p^{(1)}(x, dy), \quad n \geqslant 1,$$

* Se poate considera și cazul cînd X este o mulțime arbitrară; considerațiile corespunzătoare ies însă din cadrul acestui curs.

adică

$$p^{(n)}(x, A) = P(\xi_{\nu+n}(\omega) \in A \mid \xi_\nu(\omega) = x)$$

pentru orice $\nu \in N$. Relația lui Chapman-Kolmogorov devine în acest caz

$$p^{(m+n)}(x, A) = \int_X p^{(n)}(y, A)\, p^{(m)}(x, dy), \quad n, m \in N.$$

Probabilitățile absolute corespunzătoare se definesc succesiv prin relațiile

$$P(\xi_n(\omega) \in A) = \begin{cases} p(A), & \text{dacă } n = 0, \\ \int_X p^{(n-1)}(x, A)\, p(dx), & \text{dacă } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Exemplu. Să presupunem că X se reduce la o mulțime finită I, iar $F_X = \mathfrak{S}(X)$. Fie $(p_{ij})_{i,j \in I}$ o matrice stochastică arbitrară și să introducem funcția $p(x, A)$ prin egalitatea

$$p(x, A) = \sum_{y \in A} p_{xy}.$$

Atunci $p(x, A)$ este o probabilitate de trecere și, reciproc, orice probabilitate de trecere corespunzătoare numai astfel de X și F_X poate fi obținută pe această cale. Probabilităților de trecere definite de relația (15), le corespund puterile matricei de trecere $(p_{ij})_{i,j \in I}$. Prin urmare, studiul probabilităților

$$p^{(n)}(x, A) = \sum_{y \in A} p_{xy}^{(n)}$$

se reduce la studiul probabilităților de trecere după n pași $p_{ij}^{(n)}$.

Vom spune că probabilitatea de trecere $p(x, A)$ verifică *condiția* (M) dacă există $s \in N$ și un $\delta > 0$ astfel încît pentru orice partiție a lui X realizată cu două părți A_1 și A_2 din F_X avem

$$p^{(s)}(x, A_1) \geqslant \delta \quad \text{sau} \quad p^{(s)}(x, A_2)$$

pentru orice $x \in X$.

Folosind această condiție, putem da

Teorema 3. *Pentru ca șirul* $(p^{(n)}(x, A))_{n \in N^*}$ *să conveargă uniform în raport cu* x *și* A *către o probabilitate* $P^\infty(A)$, *este necesar și suficient ca să fie verificată condiția* (M).

Demonstrație. Condiția este necesară. Fie $\{A_1, A_2\}$ o partiție a lui X realizată cu mulțimi din F_X. Atunci

$$p^\infty(A_1) \geqslant \frac{1}{2}$$

pentru cel puțin unul din indicii $i = 1, 2$, să spunem $i = 1$. Fie atunci s suficient de mare, astfel încît

$$|p^{(s)}(x, A_1) - p^\infty(A_1)| \leqslant \frac{1}{4}$$

pentru orice $x \in X$. De aici rezultă

$$p^{(s)}(x, A_1) \geqslant p^{\infty}(A_1) - \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{4},$$

adică condiția (M) este satisfăcută.

Condiția este necesară. Demonstrația este absolut analogă celei date la teorema 2 și nu vom insista asupra ei.

Să considerăm acum cazul particular din exemplul de mai sus. În acest caz, pentru ca să fie îndeplinită condiția (M) este necesar și suficient ca să existe un întreg s, un număr $\delta > 0$ și o stare $h \in I$, astfel încît

$$p_{jh}^{(s)} \geqslant \delta > 0$$

pentru orice $j \in I$, adică tocmai condiția care apare în teorema 2.

Într-adevăr, dacă această condiție este îndeplinită, condiția (M) este satisfăcută, deoarece pentru orice poziție a lui I avem sau $A_1 \ni h$ sau $A^2 \ni h$ și deci sau

$$p^{(s)}(i, A_1) \geqslant \delta$$

pentru orice i sau

$$p^{(s)}(i, A_2) \geqslant \delta$$

pentru orice i. Reciproc, dacă este îndeplinită condiția (M), atunci

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = p_j^{\infty}$$

există, de unde, în virtutea teoremei 2, deducem condiția de mai sus.

7. Entropia lanțurilor Markov

Să considerăm un lanț Markov simplu, staționar, cu un număr finit de stări $A_1, A_2, \ldots, A_n$ și avînd matricea probabilităților de trecere $\| p_{ik} \|$ $(i, k = 1, \ldots, n)$. Să notăm cu P_k probabilitatea stării A_k. Avem

$$\sum_{k=1}^{n} P_k p_{kl} = P_l \quad (1 = 1, 2, \ldots, n).$$

Dacă sistemul se află în starea A_i, atunci trecerile sale de diferite stări A_k formează o schemă finită

$$\begin{pmatrix} A_1, A_2, \ldots, A_n \\ p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_n} \end{pmatrix}$$

Entropica acestei scheme este dată de

$$H_i = -\sum_{k=1}^{n} p_{ik} \log p_{ik}.$$

Se vede că H_i depinde de i și poate fi considerată ca măsura cantității de informație pe care o obținem dacă înaintăm în lanț cu un pas, pornind de la starea A_i. Valoarea medie a acestei mărimi

$$H = -\sum_{i=1}^{n} P_i H_i = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P_i p_{ik} \log p_{ik}$$

o vom considera ca măsura cantității medii de informație obținută prin înaintarea cu un pas în lanțul Markov considerat, și o vom numi entropia lanțului.

Analog se definește entropia lanțului dat după r pași prin

$$H^{(r)} = \sum^{n} P_i H_i^{(r)}.$$

Avem

$$H^{(r+s)} = H^{(r)} + H^{(s)}$$

pentru orice r și s numere naturale, sau

$$H^{(r)} = rH^{(1)}$$

pentru orice r.

Să demonstrăm această proprietate prin inducție. Dacă $r = s$, relația $H^{(r)} = rH^{(1)}$ este banal satisfăcută.

Să presupunem că este satisfăcută pentru $r \geqslant 1$, și să arătăm că

$$H^{(r+1)} = (r + 1)\, H^{(1)}.$$

Dacă sistemul se află în starea A_i, matricea sistemului în cele $r + 1$ experiențe poate fi considerată ca reuniunea a două scheme dependente:

α) schema de trecere la experiența următoare cu entropia $H_i^{(1)}$ și

β) schema care descrie natura sistemului în cele r experiențe care urmează, având entropia $H_k^{(r)}$, dacă schema A a avut ca rezultat evenimentul A_k.

Am văzut însă că

$$H(AB) = H(A) + H_A(B).$$

Deci

$$H_i^{(r+1)} = H_i^{(1)} + \sum_{k=1}^{n} p_{ik} H_k^{(r)}.$$

Ținînd seama că

$$\sum_{k=1}^{n} P_k p_{kl} = P_l,$$

avem

$$H^{(r+1)} = \sum_{i=1}^{n} P_i H_i^{(r+1)} = \sum_{i=1}^{n} P_i H_i^{(1)} + \sum_{k=1}^{n} H_k^{(r)} \sum_{i=1}^{n} P_i p_{ik} =$$

$$= H^{(1)} + \sum_{k=1}^{n} P_k H_k^{(r)} = H^{(1)} + H^{(r)} = (r+1) H^{(1)}.$$

8. Aplicație la o problemă de programare

Vom da o aplicație a lanțurilor Markov, strîns legată de problemele de programare dinamică.

1. Un mijloc de transport unește două puncte A și B. Să presupunem că în aceste puncte ajung cu probabilitatea a, respectiv b mărfuri ce trebuie transportate. Stările posibile în care se poate găsi mijlocul de transport considerat, sînt următoarele:

$E_1 : A \to B$, adică se deplasează de la A spre B

$E_2 : B \to A$, adică se deplasează de la B spre A.

$E_3 : A \to A$, adică rămîne în A.

$E_4 : B \to B$, adică rămîne în B.

Conducătorului mijlocului de transport i se pot da următoarele indicații:

I. Să aștepte în cele două extreme pînă ce primește marfă, și apoi să se deplaseze în celălalt punct.

II. Să aștepte în A pînă ce primește marfă și apoi să se deplaseze în B; după ce a ajuns în B, să se întoarcă în A, independent de primirea sau nu a mărfii.

III. Să aștepte în B pînă ce primește marfă, și apoi să plece în A; ajuns în A să se întoarcă spre B independent de faptul că are sau nu de transportat marfă.

IV. Să nu aștepte marfa de transportat ci să circule în mod continuu între cele două puncte.

Se observă imediat că indicațiile de mai sus dau naștere la patru lanțuri Markov, cu matricele probabilităților de trecere P_1, P_2, P_3, P_4, date de

$$P_{\mathrm{I}} = \begin{Vmatrix} 0 & b & 0 & 1-b \\ a & 0 & 1-a & 0 \\ a & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & b & 0 & 1-b \end{Vmatrix}$$

$$P_{\mathrm{II}} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1-a \\ a & 0 & 1-a \end{Vmatrix}.$$

deoarece lipsește starea E_4,

$$P_{III} = \begin{Vmatrix} 0 & b & 1-b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1-b \end{Vmatrix}$$

întrucît lipsește starea E_3,

$$P_{IV} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

deoarece lipsesc stările E_3 și E_4.

În cele ce urmează vom numi soluție stabilă, probabilitățile p_j pentru care

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j.$$

Din teorema ergodică, mai precis din observațiile făcute, am văzut cum se pot calcula probabilitățile p_j (în cazul nostru $j = 1, 2, 3, 4$).

Soluțiile stabile pentru cele patru indicații sînt următoarele:

Indicația I: $p_1 = p_2 = \frac{ab}{a+b}$, $p_3 = \frac{b(1-a)}{a+b}$, $p_4 = \frac{a(1-b)}{a+b}$.

Indicația II: $p_1 = p_2 = \frac{a}{1+a}$, $p_3 = \frac{1-a}{1+a}$.

Indicația III: $p_1 = p_2 = \frac{b}{1+b}$, $p_4 = \frac{1-b}{1+b}$.

Indicația IV: $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$.

Pentru a stabili care indicație este mai bună, trebuie să facem unele precizări privind mijlocul de transport. Spre exemplu, dacă vrem să transportăm cea mai mare parte din marfă, va trebui să alegem indicația care maximizează marfa transportată în unitatea de timp.

În cele patru cazuri, punînd marfa transportată egală cu 1, avem

Indicația I: $1 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 = \frac{2ab}{a+b}$.

Indicația II: $1 \cdot p_1 + bp_2 = \frac{a(1+b)}{1+a}$.

Indicația III: $ap_1 + 1 \cdot p_2 = \frac{b(1+a)}{1+b}$.

Indicația IV: $ap_1 + b \cdot p_2 = \frac{1}{2}(a+b)$.

Dacă cele două probabilități a și b sînt egale, atunci cele patru indicații sînt echivalente.

Dacă $a > b$, cea mai bună indicație este II; dacă $b > a$, cea mai bună indicație este III.

Se pot face însă și ipoteze mult mai apropiate de realitate, introducînd următorii parametri de natură economică.

I — prețul încasat pentru transportul unei sarcini (a unei cantități de marfă);

C_t — costul transportului;

C_0 — costul fix pentru cazul în care mijlocul de transport stă și se poate cere maximizarea venitului.

Obținem:

Indicația I: $(I - C_0 - C_t)(p_1 + p_2) - C_0(p_3 + p_4) = (I - C_t)\frac{2ab}{a+b} - C_0.$

Indicația II: $(I - C_0 - C_t)p_1 + (bI - C_0 - C_t)p_2 - C_0 p_3 =$

$$= I\frac{a(1+b)}{1+a} - C_t \cdot \frac{2a}{1+a} - C_0.$$

Indicația III: $(aI - C_0 - C_t)P_1 + (I - C_0 - C_t)p_2 - C_0 p_4 =$

$$= I\frac{b(1+a)}{1+b} - C_t \cdot \frac{2b}{1+b} - C_0.$$

Indicația IV: $(aI - C_0 - C_t)p_1 + (bI - C_0 - C_t)p_2 =$

$$= \frac{1}{2}(a+b)I - C_t - C_0.$$

Dacă $a = b$, avem următoarele valori

Indicația I: $I - C_t a - C_0,$

Indicația II: $Ia - C_t\frac{2a}{1+a} - C_0.$

Indicația III: $Ia - C_t\frac{2a}{1+a} - C_0.$

Indicația IV: $Ia - C_t - C_0.$

Rezultă de aici că cea mai bună indicație este I.

Dacă $a > b$, indicațiile III și IV rezultă mai puțin favorabile ca II și deci confruntarea se reduce la primele două indicații, și se obține că dacă

$$\frac{C_t}{I} < \frac{a-b}{2a}$$

indicația II este de preferat indicației I, în timp ce dacă

$$\frac{C_t}{I} > \frac{a-b}{2a}$$

indicația I este de preferat indicației II.

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. Procese Markov depinzînd de un parametru continuu

1. Generalități

În multe exemple din științele naturii avem de-a face cu procese în care cunoașterea unei stări a sistemului la un moment oarecare t_0 nu determină încă în mod unic stările sistemului în următoarele momente de timp, ci determină probabilitatea ca sistemul să ajungă într-una din stările unei mulțimi de stări a sistemului. Dacă cu $x \in R$ notăm starea sistemului la momentul t (t este un parametru continuu real și are semnificația timpului), și cu $A \in B$ o mulțime de stări ale sistemului, atunci pentru aceste procese $\xi(t)$ este definită probabilitatea de trecere $p(t, x; \tau, A)$ ca sistemul să treacă într-o stare din mulțimea A la momentul $\tau > t$, după ce s-a găsit la momentul t în starea x. Dacă cunoașterea stărilor sistemului pentru momentul $\tau > t$ nu modifică această probabilitate, vom numi aceste procese, *procese fără postacțiune* sau prin analogie cu cele spuse la paragraful 1, *procese de tip Markov*. Fără a intra deci în detalii care ar depăși cadrul acestui curs, putem afirma că probabilitatea de trecere $p(t, x; \tau, A)$ și o probabilitate inițială $p(A)$ caracterizează complet un proces de tip Markov $\xi(t)$.

În cele ce urmează vom folosi repartiția de trecere

$$F(t, x; \tau, y) = P(\xi(\tau) < y \mid \xi(t) = x)$$

corespunzătoare cazului cînd luăm în probabilitatea de trecere $p(t, x; \tau, A)$ pe A de forma $(-\infty, y)$. Cu alte cuvinte, $F(t, x; \tau, y)$ reprezintă probabilitatea ca la momentul τ procesul aleator corespunzător să ia o valoare mai mică decît y, dacă se știe că la momentul t, $t < \tau$ a avut loc egalitatea $\xi(t) = x$.

Vom presupune în cele ce urmează că funcția $F(t, x; \tau, y)$ este definită pentru $\tau > t$ și că se bucură de proprietățile:

(a) este o repartiție în raport cu y;

(b) este continuă în raport cu t și τ;

(c) este integrabilă în raport cu x;

(d) avem $\lim\limits_{\tau \to t+0} F(t, x; \tau, y) = \lim\limits_{\tau \to t-0} F(t, x; \tau, y) = \delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x = y, \\ 0, & \text{dacă } x \neq y. \end{cases}$

Observația. Condițiile de mai sus se transcriu imediat pentru probabilitatea de trecere $p(t, x; \tau, A)$. De altfel, toate rezultatele privind repartiția de trecere $F(t, x; \tau, y)$ se transpun și la $p(t, x; \tau, A)$.

Să considerăm acum o mulțime $A \in K$ și η o variabilă aleatoare cu repartiție $G(y)$. Știm că avem relația

$$P(A) = \int_R P_{\{\eta = y\}}(A)\, dG(y).$$

Dacă B este o altă mulțime din (K), atunci

$$P_B(A) = \int_R P_{B \cap \{\eta = y\}}(A)\, dG_B(y), \tag{1}$$

unde $G_B(y)$ este repartiția lui η condiționată de mulțimea $B \in K$.

Ţinînd seama de aceste relaţii, să luăm momentele de timp t, s, $\tau(t, < s < \tau)$ şi

$$A = \{\xi(\tau) < y\}, \quad B = \{\xi(t) = x\}$$

Aplicînd formula (1), deducem

$$P(\xi(\tau) < y \mid \xi(t) = x) = \int_R P(\xi(\tau) < y \mid \xi(t) = x, \xi(s) = z)\, d_z P(\xi(s) < z \mid \xi(t) = x).$$

Dar procesul fiind de tip Markov,

$$P(\xi(\tau) < y \mid \xi(t) = x, \xi(s) = z) = P(\xi(\tau) < y \mid \xi(s) = z)$$

şi deci

$$P(\xi(\tau) < y \mid \xi(t) = x) = \int_R p(\xi(\tau) < y \mid \xi(s) = z)\, d_z P(\xi(s) < z \mid \xi(t) = x)$$

adică

$$F(t, x; \tau, y) = \int_R F(s, z; \tau, y) d_z F(t), x; s, z). \tag{2}$$

Această relaţie este generalizarea naturală a relaţiei lui Chapman-Kolmogorov, deoarece ea reprezintă extensiunea relaţiei (10) § 1 la teoria generală a proceselor de tip Markov.

Dacă există densitatea de trecere

$$\rho(t, x; \tau, y) = \frac{\partial}{\partial y} F(t, x; \tau, y),$$

atunci pentru ea au loc relaţiile

$$F(t, x; \tau, y) = \int_{-\infty}^{y} \rho(t, x; \tau, z)\, dz; \int_R \rho(t, x; \tau, z)\, dz = 1.$$

Relaţia lui Chapman-Kolmogorov devine în acest caz

$$\rho(t, x; \tau, y) = \int_R \rho(s, z; \tau, y)\ \rho(t, x; s, z)\ dz. \tag{3}$$

Dacă procesul este staţionar, adică

$$F(t, x; \tau, y) = G(\tau - t, x, y),$$

atunci relaţiile (1) şi (2) devin, respectiv,

$$G(t_1 + t_2; x, y) = \int_R G(t_1; z, y)\, d_z G(t_2; x, z),$$

$$g(t_1 + t_2; x, y) = \int_R g(t_1; z, y)\, g(t_2, x, z)\, dz.$$

2. Ecuațiile lui Kolmogorov

Vom spune că procesul stochastic $\xi(t)$ este *continuu* dacă pentru orice $\delta > 0$ avem

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| \geqslant \delta} d_y F(t - \Delta t, x; t, y) = 0. \tag{4}$$

Ne propunem să stabilim, în anumite condiții, ecuațiile diferențiale pe care le satisface repartiția de trecere $F(t, x; \tau, y)$. Pentru aceasta vom presupune:

(a) derivatele parțiale

$$\frac{\partial F(t, x; \tau, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 F(t, x; \tau, y)}{\partial x^2}$$

există și sînt continue pentru orice t, x, y și $\tau > t$,

(b) pentru orice $\delta > 0$ există limitele

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x|<\delta} (y - x)\, d_y\, F(t - \Delta t, x; t, y) = a(t, x) \tag{5}$$

și

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x|<\delta} (y - x)^2\, d_y\, F(t - \Delta t, x; t, y) = b(t, x), \tag{6}$$

convergența fiind uniformă în raport cu x.

O b s e r v a ț i e. Primii membri ai egalităților (5) și (6) depind de δ, însă această dependență este numai aparentă datorită condiției (4). De asemenea, $b(t, x) \geqslant 0$.

Teorema 1. *Dacă condițiile* (a) și (b) *sînt îndeplinite, atunci* $F(t, x; \tau, y)$ *verifică ecuația*

$$\frac{\partial F(t, x; \tau, y)}{\partial t} = -a(t, x) \frac{\partial F(t, x; \tau, y)}{\partial x} - \frac{1}{2} b(t, x) \cdot \frac{\partial^2 F(t, x; \tau, y)}{\partial x^2}. \tag{7}$$

Demonstrație. Deoarece

$$\int_R d_z F(t - \Delta t, x; t, z) = 1,$$

înmulțind această relație cu $F(t, x; \tau, y)$, obținem

$$F(t, x; \tau, y) = \int_R F(t, x; \tau, y)\, d_z F(t - \Delta t, x; t, z).$$

Mai departe, luînd în relația lui Chapman-Kolmogorov în locul lui $t < s < \tau$ respectiv $t - \Delta t < t < \tau$, obținem

$$F(t - \Delta t, x; \tau, y) = \int_R F(t, z; \tau, y)\, d_z F(t - \Delta t; x; t, z).$$

Scanned with OKEN Scanner

Scăzînd ultimele două egalităţi şi împărţind cu Δt, obţinem

$$\frac{F(t-\Delta t, x; \tau, y) - F(t, x; \tau, y)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int_R [F(t, z; \tau, y) - F(t, x; \tau, y)]\, d_z F[t-\Delta t, x; t, z]. \tag{8}$$

Dezvoltînd în serie Taylor funcţia $(t, z; \tau, y)$ avem, în ipotezele de mai sus

$$F(t, z; \tau, y) = F(t, x; \tau, y) + (z-x)\frac{\partial F(t, x; \tau, y)}{\partial x} + \frac{1}{2}(z-x)^2 \cdot \frac{\partial^2 F(t, x; \tau, y)}{\partial x^2} + \frac{(z-x)^2}{2} R(t, z; \tau, y), \tag{9}$$

unde

$$R(t, z; \tau, y) = \frac{\partial^2 F(t, x+\theta(z-x), \tau, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F(t, x; \tau, y)}{\partial x^2}$$

este o funcţie mărginită şi $\lim_{z-x\to 0} R(t, z; \tau, y) = 0$.

Membrul drept al egalităţii (8) devine atunci, în virtutea lui (9),

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{|z-x|\geq\delta} [F(t, z; \tau, y) - F(t, x; \tau, y)]\, d_z F(t-\Delta t, x; t, z) + \frac{\partial F(t, x; \tau, y)}{\partial x} \cdot \frac{1}{\Delta t}\int_{|z-x|<\delta} (z-x)\, d_z F(t-\Delta t, x; t, z) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(t, x; \tau, y)}{\partial x^2}\cdot\frac{1}{\Delta t}\int_{|z-x|<\delta} [(z-x)^2 + (z-x)^2 R(t, x; \tau, z)]\, d_z F(t-\Delta t, x; t, z)].$$

Trecînd la limită pentru $\Delta t \to 0$ şi ţinînd seama de (4) şi de condiţiile (a) şi (b), rezultă că membrul al doilea al egalităţii (8) tinde către

$$a(t, x)\frac{\partial F(t, x; \tau, y)}{\partial x} + \frac{1}{2} b(t, x)\frac{\partial^2 F(t, x; \tau, y)}{\partial x^2}.$$

De aici deducem că limita

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{F(t-\Delta t; x; \tau, y) - F(t, x; \tau, y)}{\Delta t} = -\frac{\partial F(t, x; \tau, y)}{\partial t}$$

există, de unde rezultă tocmai prima ecuaţie a lui A.N. Kolmogorov (7)

O b s e r v a ţ i e. Dacă $F(t, x; \tau, y)$ admite densitatea de trecere $\rho(t, x; \tau, y)$, atunci se vede imediat că această densitate verifică ecuaţia

$$\frac{\partial \rho(t, x; \tau, y)}{\partial t} = -a(t, x)\frac{\partial \rho(t, x; \tau, y)}{\partial x} - \frac{1}{2} b(t, x)\cdot\frac{\partial^2 \rho(t, x; \tau, y)}{\partial x^2}.$$

Să trecem acum la deducerea celei de-a doua ecuaţii a lui A.N. Kolmogorov. Pentru aceasta, vom face încă următoarele ipoteze:

(c) există densitatea de trecere

$$\rho(t, x; \tau, y) = \frac{\partial F(t, x; \tau, y)}{\partial y};$$

(d) următoarele derivate parțiale există și sînt continue

$$\frac{\partial \rho(t, x, \tau, y)}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial y}[a(\tau, y) \cdot \rho(t, x; \tau, y)]; \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}[b(\tau, y) \cdot \rho(t, x; \tau, y)].$$

Are loc atunci

Teorema 2. *Dacă condițiile (a) — (d) sînt îndeplinite, atunci* $\rho(t, x; \tau, y)$ *verifică ecuația*

$$\frac{\partial \rho(t, x; \tau, y)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial y}[a(\tau, y)\ \rho(t, x; \tau, y)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[b(\tau, y)\ \rho(t, x; \tau, x). \quad (10)$$

Demonstrație. Fie α și β ($\alpha < \beta$) niște numere reale și $R(y)$ o funcție nenegativă continuă care admite derivate continue pînă la ordinul doi inclusiv. În plus, $R(y)$ se anulează în afara intervalului $[\alpha, \beta]$. Din continuitatea lui $R(y)$ și a derivatelor sale, deducem

$$R(\alpha) = R(\beta) = R'(\alpha) = R'(\beta) = R''(\alpha) = R''(\beta) = 0. \quad (11)$$

Să observăm acum că

$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial \rho(t, x; \tau, y)}{\partial \tau} R(y)\, dy = \frac{\partial}{\partial \tau}\int_\alpha^\beta \rho(t, x, \tau, y)\ R(y)\, dy =$$

$$= \lim_{\Delta\tau \to 0} \int_R \frac{\rho(t, x; \tau + \Delta\tau, y) - \rho(t, x; \tau, y)}{\Delta\tau} R(y)\, dy.$$

Ținînd seama de relația (3) pentru $t < \tau < \tau + \Delta\tau$, avem

$$\rho(t, x; \tau + \Delta\tau, y) = \int_R \rho(\tau, z; \tau + \Delta\tau, y)\ \rho(t, x; \tau, z)\, dz;$$

obținem

$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial \rho(t, x; \tau, y)}{\partial \tau} R(y)\, dy =$$

$$= \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{1}{\Delta\tau}\Big[\int_R\int_R \rho(t, x; \tau, z)\, \rho(\tau, z; \tau + \Delta\tau, y)\, R(y)\, dz\, dy -$$

$$- \int_R \rho(t, x; \tau, y)\, R(y)\, dy\Big] =$$

$$= \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{1}{\Delta\tau}\Big[\int_R \rho(t, x; \tau, z)\int_R \rho(\tau, z; \tau + \Delta\tau, y)\ R(y)\, dy\, dz -$$

$$- \int_R \rho(t, x; \tau, y)\ R(y)\, dy\Big] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\int_R \rho(t, x; \tau, y)\Big[\int_R \rho(\tau, y; \tau + \Delta\tau, z)\ R(z)\, dz - R(y)\Big] dy$$

după ce am invertit ordinea de integrare și apoi am schimbat variabilele de integrare (y cu z și z cu y).

Scanned with OKEN Scanner

Din formula lui Taylor, deducem

$$R(z) = R(y) + (z - y) R'(y) + \frac{(z-y)^2}{2} R''(y) + 0\ [(z-y)^2].$$

Dar mărginirea lui $R(z)$ și condiția (d) implică

$$\int_{|y-t|\geqslant\delta} \rho(\tau, y;\ \tau + \Delta\tau, z)\ R(z)\, dz = 0(\Delta\tau),$$

și

$$\int_{|y-z|<\delta} \rho(\tau, y;\ \tau + \Delta\tau, z)\, dz = 1 + 0(\Delta\tau)$$

de unde rezultă

$$\int_R \rho(\tau, y;\ \tau + \Delta\tau, z)\ R(z)\, dz - R(y) =$$

$$= R'(y) \int_{|y-z|<\delta} (z - y)\ \rho(\tau, y;\ \tau + \Delta\tau, z)\, dz +$$

$$+ \frac{1}{2} R''(y) \int_{|y-z|<\delta} [(z-y)^2 + 0(z-y)^2]\ \rho(\tau, y;\ \tau + \Delta\tau, z)\, dz + 0(\Delta\tau).$$

Prin urmare,

$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial \rho(t, x;\ \tau, y)}{\partial \tau} R(y)\, dy =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \int_R \rho(t, x;\ \tau, y) \Big\{ R'(y) \int_{|y-z|<\delta} (z - y)\ \rho(\tau, y;\ \tau + \Delta\tau, z)\, dz +$$

$$+ \frac{1}{2} R''(y) \int_{|y-z|<\delta} [(z-y)^2 + 0((z-y)^2)]\ \rho(\tau, y;\ \tau + \Delta\tau, z)\, dz +$$

$$+ 0(\Delta\tau) \Big\}\, dy.$$

Să trecem acum la limită pentru $\Delta\tau \to 0$. Datorită convergenței uniforme în limitele (5) și (6) deducem că egalitatea de mai sus se poate scrie sub forma

$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial \rho(t, x;\ \tau, y)}{\partial \tau} R(y)\, dy =$$

$$= \int_R \rho(t, x;\ \tau, y) \Big[a(\tau, y)\ R'(y) + \frac{1}{2} b(\tau, y)\ R''(y) \Big]\, dy.$$

Deoarece $R'(y) = R''(y) = 0$ pentru $y \notin [\alpha, \beta]$ avem

$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial \rho(t, x;\ \tau, y)}{\partial \tau} R(y)\, dy =$$

$$= \int_\alpha^\beta \rho(t, x;\ \tau, y) \Big[a(\tau, y)\ R'(y) + \frac{1}{2} b(\tau, y)\ R''(y) \Big]\, dy. \qquad (12)$$

Ținînd seama de formula de integrare prin părți și de relația (11), obținem

$$\int_\alpha^\beta \rho(t, x; \tau, y)\, a(\tau, y)\, R'(y)\, dy = -\int_\alpha^\beta R(y) \frac{\partial}{\partial y} [a(\tau, y)\, \rho(t, x; \tau, y)]\, dy,$$

$$\int_\alpha^\beta \rho(t, x; \tau, y)\, b(\tau, y)\, R''(y)\, dy = \int_\alpha^\beta R(y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} [b(\tau, y)\, \rho(t, x; \tau, y)]\, dy.$$

Înlocuind aceste expresii în (12), rezultă

$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial \rho(t, x; \tau, y)}{\partial \tau} R(y)\, dy =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left\{ -\frac{\partial}{\partial y} [a(\tau, y)\, \rho(t, x; \tau, y)] + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} [b(\tau, y)\, \rho(t, x; \tau, y)] \right\} R(y)\, dy$$

sau

$$\int_\alpha^\beta \left\{ \frac{\partial \rho(t, x; \tau, y)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y} [a(\tau, y)\, \rho(t, x; \tau, y)] - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [b(\tau, y)\, \rho(t, x; \tau, y)] \right\} R(y)\, dy = 0. \tag{13}$$

Deoarece funcția $R(y)$ este arbitrară, din (13) rezultă tocmai (10). Într-adevăr, să presupunem că nu ar fi așa; atunci există niște numere t, x, τ, y astfel încît expresia din acolade care apare în (13) să fie diferită de zero. În virtutea ipotezelor făcute, această expresie este o funcție continuă; într-adevăr, există un interval $y_1 < y < y_2$ unde ea își păstrează un semn constant. Dacă $\alpha \leqslant y_1$, $\beta \geqslant y_2$, atunci punem $R(y) = 0$ pentru $y \leqslant y_1$ și $y \geqslant y_2$ și $R(y) > 0$ pentru $y_1 < y < y_2$. Pentru o astfel de alegere a lui $R(y)$ integrala din membrul al doilea din (13) trebuie să fie diferită de zero, ceea ce duce la o contradicție. Așadar, din (13) rezultă cea de-a doua ecuație a lui A. N. Kolmogorov* dată de relația (1) teorema 2 este deci demonstrată.

Este natural să ne punem și problema inversă în sensul determinării unei funcții $\rho(t, x; \tau, y)$ din ecuațiile lui A. N. Kolmogorov în care coeficienții $a(t, x)$ și $b(t, x)$ sînt presupuși cunoscuți. Desigur, nu se caută o soluție arbitrară a acestor ecuații ci acelea pentru care

(1) $\rho(t, x; \tau, y) \geqslant 0$ pentru orice t, x, τ, y,

(2) $\int_R \rho(t, x; \tau, y)\, dy = 1$,

(3) $\lim_{\tau \to t} \int_{|y-x| \geqslant \delta} \rho(t, x; \tau, y)\, dy = 0$ pentru orice $\delta > 0$.

* Această ecuație a fost întîlnită anterior în studiul teoriei difuziei; ea este cunoscută și sub numele de ecuația lui Fokker-Planck, după numele fizicienilor care au întîlnit-o pentru prima oară. Coeficienții $a(t, x)$ și $b(t, x)$ au o semnificație fizică bine stabilită.

Scanned with OKEN Scanner

Condițiile care trebuie să fie impuse funcțiilor $a(t, x)$ și $b(t, x)$ pentru a asigura existența și unicitatea soluțiilor lui A. N. Kolmogorov și care să verifice cele trei condiții de mai sus ies însă din cadrul acestui curs.

O b s e r v a ț i e. Dacă în locul condiției lui (4) presupunem că pentru orice $\delta > 0$ are loc relația

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{|y-x|>\delta} (y - x)^2 \, dFy \, (t - \Delta t, x; \; t, y) = 0,$$

atunci condițiile (5) și (6) devin

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_R (y - x) \, dFy \, (t - \Delta t, x; \; t, y) = a(t, x)$$

și

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_R (y - x)^2 \, dFy \, (t - \Delta t, x; \; t, y) = b(t, x).$$

Să considerăm acum ca ilustrare cazul în care procesul aleator considerat este spațial *omogen*, adică funcția $\rho(t, x; \tau, y)$ nu depinde de t, τ și $y - x$. În acest caz funcțiile $a(t, x)$ și $b(t, x)$ nu depind de x:

$$a(t) = a(t, x), \quad b(t) = b(t, x).$$

Ecuațiile (7) și (10) devin în acest caz

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= -a(t) \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2} b(t) \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial \tau} &= -a(\tau) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2} b(\tau) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Să considerăm mai întîi cazul particular $a(t) = 0$ și $b(t) = 1$; ecuațiile (14) devin

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial \tau} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Din teoria generală a ecuației căldurii se știe că soluția unică a ecuațiilor (15), verificînd cele trei condiții de mai sus impuse lui $\rho(t, x; \tau, y)$, este

$$\rho(t, x; \tau, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau - t)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(\tau - t)}}.$$

Făcînd acum schimbarea de variabile

$$x' = x - \int_a^t a(z) \, dz, \quad y' = y - \int_a^\tau b(z) \, dz,$$

$$t' = \int_a^t b(z) \, dz, \quad \tau' = \int_a^\tau b(z) \, dz$$

putem reduce ecuațiile (14) la ecuațiile (15). Obținem deci pentru ecuațiile (14) soluția

$$\rho(t, x; \tau, y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-x-A)^2}{2\sigma^2}},$$

unde

$$A = \int_t^\tau a(z)\, dz, \quad \sigma^2 = \int_t^\tau b(z)\, dz.$$

În sfîrșit, un alt caz interesant se obține cînd procesul este staționar; în acest caz funcțiile $a(t, x)$ și $b(t, x)$ nu depind de t. Dacă procesul este și staționar și omogen, atunci aceste funcții se reduc la două constante a și b, cum este de altfel cazul ecuațiilor (15).

3. Procese total discontinue

Un proces aleator $\xi(t)$ este total *discontinuu* sau *de tip Feller* dacă pentru orice interval de timp $(t, t + \Delta t)$ mărimea $\xi(t)$ rămîne neschimbată și egală cu x cu probabilitatea $1 - q(t, x)\,\Delta t + 0(\Delta t)$ și numai cu probabilitatea $q(t, x)\,\Delta t + 0(\Delta t)$ poate suferi o schimbare (iar probabilitatea ca să aibă loc mai mult decît o schimbare a lui $\xi(t)$ într-un interval de timp Δt este $0(\Delta t)$). Deoarece ne mărginim la procese fără postacțiune, este natural ca repartiția de trecere a schimbărilor ulterior saltului lui $\xi(t)$ să nu depindă de valorile pe care le-a luat $\xi(t)$ în momentele premergătoare saltului.

Să notăm cu $Q(t, x, y)$ repartiția condiționată a lui $\xi(t)$ ca la momentul t să se producă o schimbare de stare (un salt), știind că $\xi(t - 0) = x$, cu alte cuvinte ca înainte de a-și fi schimbat starea $\xi(t)$ să fi luat valoarea x.

Funcția $F(t, x; \tau, y)$ se exprimă cu ușurință cu ajutorul funcțiilor $q(t, x)$ și $Q(t, x, y)$. Avem

$$F(t, x; \tau, y) = [1 - q(t, x)\,(\tau - t)]\,\delta(x, y) + (\tau - t)\,q(t, x)\,Q(t, x, y) + 0(\tau - t).$$

După sensul funcțiilor $q(t, x)$ și $Q(t, x, y)$ ele sînt nenegative, iar

$$Q(t, x, -\infty) = 0, \quad Q(t, x + \infty) = 1.$$

În plus, presupunem că $p(t, x)$ este mărginită, ambele funcții $q(t, x)$ și $Q(t, x, y)$ sînt continue în raport cu t și x (este suficient, de exemplu, să se presupună că sînt măsurabile în raport cu x).

În ceea ce privește funcția $F(t, x; \tau, y)$ nu vom face nici o ipoteză, ci vom păstra numai definiția ei pentru $t = \tau$:

$$\lim_{\tau \to t-0} F(t, x; \tau, y) = \lim_{t \to \tau+0} F(t, x; \tau, y) = \delta(x, y).$$

În aceste condiții vom stabili unele ecuații integro-diferențiale pe care le verifică funcția $F(t, x; \tau, y)$; mai precis, vom demonstra

Teorema 3. *Funcţia de repartiţie $F(t, x; \tau, y)$ a unui proces total discontinuu fără postacţiune verifică următoarele două ecuaţii integrodiferenţiale:*

$$\frac{\partial F(t,x;\tau,y)}{\partial t} = q(t,x)\left[F(t,x;\tau,y) - \int_R F(t,z;\tau,y)\, d_z Q(t,x,z)\right] \quad (17)$$

$$\frac{\partial F(t,x;\tau,y)}{\partial \tau} = -\int_{-\infty}^{y} q(t,z)\, d_z F(t,x;\tau,z) +$$

$$+ \int_R q(\tau,z)\, Q(\tau,z,y)\, d_z F(t,x;\tau,z). \quad (18)$$

Demonstraţie. După relaţiile lui Chapman-Kolmogorov (2) avem

$$F(t,x;\tau,y) = \int_R F(t+\Delta t, z;\tau,y)\, d_z F(t,x;t+\Delta t,z).$$

Înlocuind în această relaţie pe $F(t,x;t+\Delta t,z)$ cu valoarea dată de (16) şi observînd că

$$\int_R F(t+\Delta t,z;\tau,y)\, d_z\, \delta(t,z) = F(t+\Delta t,x;\tau,y),$$

obţinem

$$F(t,x;\tau,y) = [1 - q(t,x)\,\Delta t]\, F(t+\Delta t,x;\tau,y) +$$

$$+ \Delta t\, q(t,x) \int_R F(t+\Delta t,z;\tau,y)\, d_z Q(t,x,z) + 0(\Delta t).$$

De aici deducem

$$\frac{F(t+\Delta t,x;\tau,y) - F(t,x;\tau,y)}{\Delta\tau} = q(t,x)\, F(t+\Delta t,x;\tau,y) -$$

$$- q(t,x) \int_R F(t+\Delta t,z;\tau,y)\cdot d_z Q(t,x,z) + 0(\Delta t).$$

Trecînd la limită pentru $\Delta t \to 0$ obţinem tocmai ecuaţia (17).

Pentru a stabili cea de-a doua ecuaţie, să observăm că putem scrie ţinînd seama de relaţia lui Chapman-Kolmogorov (2) şi de (16).

$$F(t,x;\tau+\Delta t,y) = \int_R F(\tau,z;\tau+\Delta\tau,y)\, d_z F(t,x;\tau,z) =$$

$$= \int_R \left\{[1-q(\tau,z)\,\Delta\tau]\,\delta(z,y) + \Delta\tau q(\tau,z)\, Q(\tau,z,y) + 0(\Delta\tau)\right\} d_z F(t,x;\tau,z) =$$

$$= \int_{-\infty}^{y} d_z F(t,x;\tau,z) - \Delta\tau \int_{-\infty}^{y} q(\tau,z)\, d_z F(t,x;\tau,z) +$$

$$+ \Delta\tau \int_R q(\tau,z)\, Q(\tau,z,y)\, d_z F(t,x;\tau,z) + 0(\Delta\tau).$$

Cum

$$\int_{-\infty}^{y} d_z F(t,x;\tau,z) = F(t,x;\tau,y),$$

obținem

$$\frac{F(t, x;\ \tau + \Delta\tau\ y) - F(t, x;\ \tau, y)}{\Delta\tau} = -\int_{-\infty}^{y} q(\tau, z)\ d_z F(t, x;\ \tau, y) +$$

$$+\int_R q(\tau, z)\ Q(\tau, z, y)\ d_z F(t, x;\ \tau, z) + 0(\Delta t)$$

și trecînd la limită, pentru $\Delta\tau \to 0$, găsim tocmai ecuația (18).

Ecuația (17) a fost obținută de A. N. Kolmogorov în 1931; în ipotezele de mai sus, ambele ecuații (17) și (18) au fost obținute de W. Feller în 1937; în literatura de specialitate, ecuațiile (1) și (18) se întîlnesc sub numele de ecuațiile lui Kolmogorov-Feller.

Observație. În cazul unui proces cu o mulțime cel mult numerabilă de stări I, ecuațiile (17) și (18) se reduc la

$$\frac{\partial P_{ij}(t, \tau)}{\partial t} = -q_j(t)\ p_{ij}(t,\ \tau) + \sum_{k \in I} q_k\, Q_{kj}(t)\ p_{ik}(t)\ \ (t, \tau)$$

și

$$\frac{\partial p_{ij}(t, \tau)}{\partial t} = q_i(\tau)\ p_{ij}(t, \tau) - q_i(\tau) \sum_{k \in I} Q_{ik}(\tau)\ P_{kj}(t, \tau),$$

unde $p_{ij}(t, \tau)$ este probabilitatea ca $\xi(t) = j$ știind că $\xi(t) = i$, $t < \tau$, iar $q(t)$ și $Q_{ik}(t)$ sînt analogele funcțiilor $q(t, x)$ și $Q(t, x, y)$.

4. Procese Poisson

Procesul Poisson este cel mai simplu dintre procesele Markov discontinue. Acest proces ocupă o poziție specială în teoria probabilităților, găsindu-și o largă aplicație în biologie, fizică, tehnică.

Despre procesul Poisson $\xi(t)$ vom presupune că: 1) probabilitatea ca să aibă loc o schimbare în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$ este $\lambda t + 0(\Delta t)$, unde λ este o constantă pozitivă;

2) probabilitatea ca să aibă loc mai mult decît o schimbare în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$ este $0(\Delta t)$;

3) probabilitatea ca să nu aibă loc nici o schimbare în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$ este $1 - \lambda\ \Delta t + 0(\Delta t)$.

Aceste probabilități sînt independente de starea sistemului.

Fie acum

$$p_x(t) = P(\xi(t) = x),\ x \in N.$$

În virtutea ipotezelor făcute mai sus, avem

$$p_x(t + \Delta t) = (1 - \lambda\Delta t)\ p_x(t) + \lambda p_{x-1}(t)\ \Delta t + 0(\Delta t)$$

sau

$$p_x(t + \Delta t) - p_x(t) = -\lambda p_x(t) + \lambda p_{x-1}(t)\Delta t + 0(\Delta t).$$

Împărțind cu t și trecînd la limită pentru $\Delta t \to 0$, obținem

$$\frac{dp_x(t)}{dt} = -\lambda p_x(t) + \lambda p_{x-1}(t), \quad x \geqslant 1. \tag{19}$$

Cînd $x = 0$, $p_{x-1}(t) = 0$, deci

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t). \tag{20}$$

Aceste două ecuații caracterizează procesul Poisson; ele trebuie rezolvate cu condiția inițială

$$p_x(0) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = 0, \\ 0, & \text{dacă } x \in N^*. \end{cases} \tag{21}$$

Din (20) și (21), deducem

$$p_0(t) = e^{-\lambda t};$$

ținînd seamă de această expresie și de (19), obținem

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda\, p_1(t) + e^{-\lambda t},$$

de unde obținem

$$p_1(t) = \lambda t\, e^{-\lambda t}.$$

Continuînd în acest mod, obținem

$$p_x(t) = e^{-\lambda t}\left[\lambda \int_0^t p_{x-1}(\tau) e^{-\lambda \tau}\, d\tau + C_x\right], \quad x \in N^*. \tag{22}$$

Din condiția inițială (21) deducem însă $C_x = 0$, $x \in N^*$ și deci din (22) rezultă

$$p_x(t) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}.$$

Această expresie este repartiția Poisson și ea dă probabilitatea ca la momentul $t \geqslant 0$ sistemul să se găsească în strarea x. O altă interpretare este următoarea: $p_x(t)$ este probabilitatea a x schimbări într-un interval de lungime t.

Se verifică imediat că $\sum_{x \in N^*} p_x(t) = 1$. De asemenea, $p_x(t)$, ca funcție de x, este monoton descrescătoare pentru $\lambda t < 1$. În plus, $p_x(t)$ are un maximum în vecinătatea lui $x \sim \lambda t$ pentru $\lambda t > 1$.

Caracteristicile procesului sînt, evident,

$$M(\xi(t)) = \lambda t \; ; \; D(\xi(t)) = \lambda t.$$

O b s e r v a ț i e. Ecuațiile procesului Poisson pot fi deduse și direct din ecuațiile (17) și (18).

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL V

LANȚURI CU LEGĂTURI COMPLETE

Lanțurile cu legături complete au fost introduse în calculul probabilităților de către O. O n i c e s c u și G. M i h o c. Imediat după apariția primei lor lucrări în 1935, o serie de cercetători au adus în aceeași direcție diferite contribuții și au făcut diverse aplicații. Menționăm teza lui R. F o r t e t în care acest autor aduce contribuții directe la studiul lanțurilor introduse în lucrarea lui W. D o e b l i n și R. F o r t e t și lucrarea lui W. D o e b l i n în care acesta utilizează o categorie de lanțuri cu legături complete, numite lanțuri de tip (B), în studiul fracțiilor continue. Menționăm, de asemenea, că în ultimul timp lanțurile cu legături complete au început să fie studiate în legătură cu modele stochastice speciale care se întîlnesc în procese de asimilare de cunoștințe (învățare).

§ 1. Lanțuri cu legături complete Onicescu-Mihoc

1. Lanțuri cu legături complete simple și multiple

Să considerăm un șir de variabile aleatoare

$$\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots, \tag{1}$$

fiecare putînd lua o aceeași mulțime finită de valori

$$\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m, \omega_{m+1})^* \qquad m \in N^*$$

și să admitem că se dă repartiția inițială $p_j = P(\omega_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$.

$$0 \leqslant p_j \leqslant 1, \quad 1 \leqslant j \leqslant m+1, \sum_{j=1}^{m+1} p_j = 1.$$

---

* Vom presupune, pentru comoditate, că $\omega_1, \ldots, \omega_{m+1} \in R$; în lucrare se vor folosi în permanență următoarele notații:
$N = \{0,1, \ldots\}$, $N^* = \{1,2, \ldots\}$, $Z = \{\ldots, -1,0,1, \ldots\}$, R — mulțimea numerelor reale $R^{(s)} = \underbrace{R \times \ldots \times R}_{\text{de } s \text{ ori}}$, C — mulțimea numerelor complexe.

În acest caz, variabilei ξ_1 îi va corespunde schema

$$\xi_1: \begin{pmatrix} \omega_j \\ p_j \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m+1.$$

Să notăm cu $p_j^{(n)}$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, ($p_j^{(1)} = p_j$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$) probabilitățile absolute corespunzătoare variabilei de rang n,

$$\xi_n: \begin{pmatrix} \omega_j \\ p_j^{(n)} \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m+1, \; p_{m+1}^{(n)} = 1 - \sum_{j=1}^{m} p_j^{(n)}$$

și pentru simplificarea scrierii, vom introduce următoarea notație

$$p = (p_1, \ldots, p_m),$$

$$p^{(n)} = (p_1^{(n)}, \ldots, p_m^{(n)}), \; n > 1.$$

Definiția 1. Un șir de variabile aleatoare (1) formează un lanț cu legături complete simplu variabil, dacă probabilitățile $p_j^{(n+1)}$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, corespunzătoare variabilei de rang $n+1$, sînt de forma

$$p_j^{(n+1)} = \psi_{ij}^{(n)}(p_1^{(n)}, \ldots, p_m^{(n)}, p_{m+1}^{(n)}) = \varphi_{ij}^{(n)}(p^{(n)})$$

$$1 \leqslant i, j \leqslant m+1, \; n \in N^*$$

și

$$0 \leqslant \varphi_{ij}^{(n)} \leqslant 1, \qquad \sum_{j=1}^{m+1} \varphi_{ij}^{(n)} = 1,$$

în ipoteza că la momentul n s-a prezentat valoarea ω_i; funcțiile $\varphi_{i,j}^{(n)}$ poartă numele de *funcții fundamentale*.

Din definiția 1 rezultă că un lanț cu legături complete simplu variabil este complet determinat de matricele $\varphi^{(n)} = (\varphi_{i,j}^{(n)})$, $1 \leqslant i, j \leqslant m+1$ $n \in N^*$, și de repartiția inițială, p_j, $1 \leqslant j \leqslant m+1$.

Definiția 2. Un lanț cu legături complete simplu, pentru care funcțiile

$$\varphi_{ij}^{(n)}(p^{(n)}) = \varphi_{i,j}(p^{(n)}), \; 1 \leqslant i \leqslant m+1, \; 1 \leqslant j \leqslant m, \; n \in N^*,$$

nu depinde de n, se numește *staționar*[1].

Fie acum Δ un domeniu de puncte p din $R^{(m)}$, definit de relațiile $0 \leqslant p_j \leqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $\sum_{j=1}^{m} p_j \leqslant 1$. Cu privire la funcțiile fundamentale $\varphi_{i,j}^{(n)}$, $1 \leqslant i, j \leqslant m+1$, vom adopta în cele ce urmează unele notații simplificatoare; anume, vom nota cu $\varphi_i^{(n)}$, $1 \leqslant i \leqslant m+1$ aplicația $\Delta \to \Delta$, definită de relațiile

$$\varphi_i^{(n)}: \; p_j' = \varphi_{i,j}^{(n)}(p), \qquad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

[1] În literatură se folosește și termenul de constant sau omogen.

Scanned with OKEN Scanner

Evident, $p'_{m+1} = 1 - \sum_{j=1}^{m} p'_j$. De asemenea, în cazul staționar $\varphi_i^{(n)} = \varphi_i$, $1 \leqslant i \leqslant m+1$, și vom nota cu

$$\varphi_{i_1,\ldots,i_s}(p) = (\varphi_{i_1,\ldots,i_s,1}(p) \ldots, \varphi_{i_1,\ldots,i_s,m}(p))$$

vectorul m-dimensional obținut prin aplicarea succesivă a aplicațiilor $(\varphi_{i_l})_{1 \leqslant l \leqslant s}$ punctului p.

Definiția 3. Dacă funcția $\varphi_{ij}^{(n)}$, $1 \leqslant i, j \leqslant m+1$, $n \in N^*$, din definiția 1 sînt liniare în raport cu $p_1^{(n)}, \ldots, p_m^{(n)}$, atunci lanțul cu legături complete considerat se numește *liniar*.

Definiția 4. Un șir de variabile aleatoare (1) formează un lanț cu legături complete variabil de *multiplicitate*, dacă probabilitățile $p_j^{(n+1)}$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, corespunzătoare variabilei de rang $n+1$, sînt de forma

$$p_j^{(n+1)} = \varphi_{j_1,\ldots j_l,j}^{(n)}(p^{(n)}; p^{(n-1)}; \ldots; p^{(n-l+1)}),$$

$$1 \leqslant j_1, \ldots, j_l \leqslant m+1; \quad 1 \leqslant j \leqslant m+1, \quad n \in N^*$$

și

$$0 \leqslant \varphi_{j_1,\ldots j_l,j}^{(n)} \leqslant 1, \quad \sum_{j=1}^{m} \varphi_{j_1,\ldots j_l,j}^{(n)} = 1,$$

în ipoteza că la momentele $n, n-1, \ldots, n-l+1$ s-au obținut, respectiv, valorile $\omega_{j1}, \omega_{j2}, \ldots, \omega_{j_l}$.

În mod analog se poate defini lanțul multiplu staționar.

2. Lanțuri alternative

Un lanț cu legături complete în sensul definiției 1 este *alternativ* dacă $m = 1$. Pentru acest caz se vor utiliza uneori notațiile

$$p_1 = p \qquad p_2 = q,$$

$$p_1^{(n)} = p^{(n)}, \; p_2^{(n)} = q^{(n)}$$

pentru orice $n > 1$. De asemenea, funcțiile fundamentale devin

$$\varphi_{1,1}^{(n)}(p_1^{(n)}) = \varphi^{(n)}(p^{(n)})$$

și

$$\varphi_{2,1}^{(n)}(p_1^{(n)}) = \psi^{(n)}(p^{(n)}),$$

celelalte funcții $\varphi_{1,2}^{(n)}$ și $\varphi_{2,2}^{(n)}$ deducîndu-se cu ajutorul lui $\varphi^{(n)}$ și $\psi^{(n)}$.

Pentru un lanț alternativ staționar funcțiile fundamentale corespunzătoare sînt φ și ψ. În acest caz, pentru iteratele unui punct $p \in [0, 1]$ vom folosi notația

$$\varphi_{i_1,\ldots,i_s}(p),$$

unde indicii $i_1, \ldots, i_s$ iau valorile 1 sau 2 după cum s-a aplicat funcția $\varphi_{1,1} = \varphi$ sau funcția $\varphi_{1,2} = \psi$.

Scanned with OKEN Scanner

3. Comportarea asimptotică.

Diverse forme de ergodicitate

Să notăm cu $P_i^{(n)}(p)$, $1 \leqslant i \leqslant m+1$, $n \in N^*$, probabilitatea totală ca după n pași variabila ξ_n să ia valoarea ω_i, $\sum_{i=1}^{m+1} P_i^{(n)}(p) = 1$.

După comportarea asimptotică a probabilităților $(P_i^{(n)}(p))_{1 \leqslant i \leqslant m+1}$, cînd $n \to \infty$, lanțurile cu legături complete sînt de mai multe feluri. În cele ce urmează vom considera numai lanțurile simple.

Definiția 5. Un lanț cu legături complete variabil este *ergodic* dacă

$$\lim_{n\to\infty} P_i^{(n)}(p) = P_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m+1,$$

unde $P_i(p)$, $1 \leqslant i \leqslant m+1$, sînt constante care nu depind de $p = (p_1, \ldots, p_m)$.

Definiția 6. Un lanț cu legături complete variabil este *semiergodic*, dacă

$$\lim_{n\to\infty} P_i^{(n)}(p) = P_i(p),\ 1 \leqslant i \leqslant m+1,$$

unde $P_i(p)$, $1 \leqslant i \leqslant m+1$, sînt funcții care depind de $p = (p_1, \ldots, p_m)$.

Definiția 7. Un lanț cu legături complete variabil este *oscilant*, dacă

$$\lim_{n\to\infty} P_i^{(2n+1)}(p) = P_i^1(p),\ 1 \leqslant i \leqslant m+1,$$

și

$$\lim_{n\to\infty} P_i^{(2n)}(p) = P_i^2(p),\ 1 \leqslant i \leqslant m+1,$$

unde $P_i^1(p)$ și $P_i^2(p)$, $1 \leqslant i \leqslant m+1$, sînt funcții care depind de $p = (p_1, \ldots, p_m)$ și $P_i^1(p) \neq P_i^2(p)$ pentru cel puțin un i, $1 \leqslant i \leqslant m+1$.

Relația funcțională a probabilității totale

Vom observa întîi că

$$P_i^{(n+1)}(p) = \sum_{\substack{j_k \\ 1 \leqslant k \leqslant n}}^{m+1} p_{j_1} \varphi_{j_1 j_2}^{(1)}(p^{(1)})\, \varphi_{j_2 j_3}^{(2)}(p^{(2)}) \ldots \varphi_{j_n j_k}^{(n)}(p^{(n)}); \qquad (1)$$

dacă lanțul cu legături complete considerat este staționar, atunci (1) devine

$$P_i^{(n+1)}(p) = \sum_{\substack{j_k=1 \\ 1 \leqslant k \leqslant n}}^{m+1} p_{j_1} \varphi_{j_1 j_2}(p^{(1)})\, \varphi_{j_2 j_3}(p^{(2)}) \ldots \varphi_{j_n i}(p^{(n)})$$

de unde rezultă pentru aceste lanțuri relația funcțională fundamentală

$$P_i^{(n+1)}(p) = \sum_{j=1}^{m+1} p_j \, P_i^{(n)}(\varphi_i(p)), \; 1 \leqslant i \leqslant m+1, \tag{2}$$

$$p_{m+1} = 1 - \sum_{j=1}^{m} p_j.$$

Relația (2) este de fapt o relație de recurență care permite să se determine din aproape în aproape probabilitățile totale care corespund celei de a n-a variabile a șirului (1) din § 1, prezentate de data aceasta sub formă mai puțin detaliată.

Evident, pentru un lanț alternativ, relația funcțională (2) se reduce la

$$P^{(n+1)}(p) = p \, P^{(n)}(\varphi(p)) + (1-p) \, P^{(n)}(\psi(p)),$$

unde

$$P^{(n)}(p) = P_1^{(n)}(p_1).$$

4. Exemple de lanțuri cu legături complete

a. *Lanțuri de tip Markov simple și multiple.* Din însăși definiția 1 se poate constata marea generalitate a lanțurilor cu legături complete; într-adevăr, cel mai simplu și totuși cel mai concludent exemplu este cazul cînd funcțiile fundamentale din definiția 1 (§ 1) depind explicit de $p_1^{(n)}, \ldots, p_m^{(n)}$, ceea ce revine la faptul că șirul (1) (§ 1) se reduce la un lanț Markov simplu variabil cu o mulțme finită de stări.

Mai mult, un lanț Markov de multiplicitate l cu o mulțime finită de stări Ω poate fi considerat ca un lanț cu legătnri complete simplu. Fie atunci

$$P_{j_1 \ldots j_l, j} = P(\xi_n = \omega_j \mid \xi_{n-1} = \omega_{j_l}, \ldots, \xi_{n-l} = \omega_{j_1})$$

probabilitatea de trecere care definește lanțul și deci variabilei ξ_n îi va corespunde schema

$$\xi_n : \begin{pmatrix} \omega_j \\ P_{j_1 \ldots j_l, j} \end{pmatrix}, \; 1 \leqslant j \leqslant m+1.$$

Să presupunem acum că la momentul n s-a obținut starea ω_j; probabilitatea de a obține starea ω_h corespunzătoare momentului imediat următor $n+1$ va fi în acest eaz egală cu

$$P_{j_2 \ldots j_l, j, h}.$$

Rezultă deci că cunoașterea stării ω_j și a probabilităților $P_{j_1 \ldots j_l, j}$, care se referă la variabila ξ_n, determină probabilitățile corespunzătoare variabilei ξ_{n+1}. Cu alte cuvinte, sîntem în prezența unui lanț cu legături complete simplu.

Scanned with OKEN Scanner

b. *Diverse scheme de urne.* Să considerăm o urnă inițială U_1 cu a_j bile de culoare j, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, și fie $a_j^{(n+1)}$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, compoziția urnei U_{n+1} ($a_j^{(1)} = a_j$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$), dată după următoarea regulă: dacă compoziția urnei U_n a fost $a_j^{(n)}$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, și în extracția de rang n s-a obținut o bilă de culoare i, atunci compoziția urnei U_{n+1} este dată de relațiile

$$a_j^{n+1} = f_{ij}^{(n)}(a_1^{(n)}, \ldots, a_{m+1}^{(n)}),\ 1 \leqslant j \leqslant m+1,\ n \in N^*$$

unde funcțiile $f_{ij}^{(n)}$, $1 \leqslant i, j \leqslant m+1$, $n \in N^*$ iau valori în N.

Schema corespunzătoare urnei U_n este

$$\begin{pmatrix} a_j^{(n)} \\ p_j^{(n)} \end{pmatrix},\ p_j^{(n)} = \frac{a_j^{(n)}}{\sum\limits_{k=1}^{m+1} a_k^{(n)}},\ 1 \leqslant j \leqslant m+1,$$

iar cea corespunzătoare urnei U_{n+1}

$$\begin{pmatrix} a_j^{(n+1)} \\ p_j^{(n+1)} \end{pmatrix},\ p_j^{(n+1)} = \frac{a_j^{(n+1)}}{\sum\limits_{k=1}^{m+1} a_k^{(n+1)}} = \frac{f_{ij}^{(n)}(a_1^{(n)}, \ldots, a_{m+1}^{(n)})}{\sum\limits_{k=1}^{m+1} f_{ik}^{(n)}(a_1^{(n)}, \ldots, a_{m+1}^{(n)})}. \tag{1}$$

Dacă notăm, respectiv, cu $D_j^{(n)}(p^{(n)})$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, minorii elementelor ultimei linii din determinantul

$$D^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 - p_1^{(n)} & p_1^{(n)} & \ldots & p_1^{(n)} \\ p_2^{(n)} & 1 - p_2^{(n)} & \ldots & p_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{m+1}^{(n)} & p_{m+1}^{(n)} & \ldots & p_{m+1}^{(n)} \end{vmatrix},$$

atunci obținem

$$a_j^{(n)} = \lambda^{(n)} D_j^{(n)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m+1$$

și prin urmare probabilitățile din (1) devin

$$p_j^{(n+1)} = \frac{f_{ij}^{(n)}(\lambda^{(n)} D_1^{(n)}, \ldots, \lambda^{(n)} D_{m+1}^{(n)})}{\sum\limits_{k=1}^{m+1} f_{ik}^{(n)}(\lambda^{(n)} D_1^{(n)}, \ldots, \lambda^{(n)} D_{n+1}^{(n)})},\ 1 \leqslant j \leqslant m+1. \tag{2}$$

Să admitem acum că funcțiile $f_{ij}^{(n)}$, $1 \leqslant i, j \leqslant m+1$, $n \in N^*$ sînt omogene de același grad. În acest caz (2) se reduce la

$$p_j^{(n+1)} = \frac{f_{ij}^{(n)}(D_1^{(n)}, \ldots, D_{m+1}^{(n)})}{\sum\limits_{k=1}^{m+1} f_{ik}^{(n)}(D_1^{(n)}, \ldots, D_{m+1}^{(n)})} = \varphi_{i,j}^{(n)}(p^{(n)}), \quad 1 \leqslant j \leqslant m+1,$$

adică tocmai un lanț cu legături complete simplu însă variabil.

Dacă presupunem în schema descrisă că numărul bilelor în diversele urne este constant și egal cu M, adică

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{m+1} f_{ik}^{(n)}(a_1^{(n)}, \ldots, a_{m+1}^{(n)}) = M,$$

probabilitățile din (1) se reduc la

$$p_j^{(n+1)} = \frac{f_{ij}^{(n)}(a_1^{(n)}, \ldots, a_{m+1}^{(n)})}{M} = \frac{1}{M} f_{ij}^{(n)}(Mp_1^{(n)}, \ldots, Mp_{m+1}^{(n)}).$$

c. *Schema generală de contagiune în progresie aritmetică.* Această schemă se încadrează în schema generală de la punctul b.

Într-adevăr, să presupunem că în urma extracției de rang n s-a obținut o bilă de culoare i și se pun înapoi în urnă $1 + d_i$ bile de aceeași culoare, adică

$$a_j^{(n+1)} = f_{ij}^{(n)}(a_1^{(n)}, \ldots, a_{m+1}^{(n)}) = a_j^{(n)} \delta_{ij} d_j, \; 1 \leqslant j \leqslant m+1.$$

Dacă se fac n extracții succesive care dau ν_i bile de culoare i, $1 \leqslant i \leqslant m+1$, $\sum_{i=1}^{m+1} \nu_i = n$, atunci

$$p_j^{(n+1)} = \frac{a_j + \nu_i d_j}{M + \sum_{k=1}^{m+1} \nu_k d_k}, \; 1 \leqslant j \leqslant m+1, \tag{3}$$

unde

$$M = \sum_{j=1}^{m+1} a_j.$$

Dacă obținem ca rezultat al extracției de rang $n+1$ o bilă de culoare i, atunci

$$p_j^{(n+2)} = \frac{a_j + \nu_j d_j + \delta_{ij} d_j}{M + \sum_{k=1}^{m+1} \nu_k d_k + d_i}, \; 1 \leqslant j \leqslant m+1, \; \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

de unde rezultă că

$$p_j^{(n+2)} = \varphi_{ij}^{(n)}(p^{(n)}) = \frac{np_j^{(n+1)} + p_j^{(n+1)} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{a_k}{d_k} + \delta_{ij} d_j \sum_{k=1}^{m+1} \frac{p_k^{(n+1)}}{d_k}}{n + \sum_{k=1}^{m+1} \frac{a_k}{d_k} + d_i \sum_{k=1}^{m+1} \frac{p_k^{(b+1)}}{d_k}}, \; 1 \leqslant j \leqslant m+1.$$

Obținem deci un lanț cu legături complete simplu și variabil pentru care

$$\varphi_{i,j}^{(n)}(p^{(n)}) \sim p_j^{(n+1)}.$$

d. *Schema de contagiune a lui G. Pólya.* Această schemă este un caz particular al schemei de la punctul precedent, și anume pentru $m = 1$,

$d_1 = d_2 = d$. Dacă după n extracții au fost obținute ν bile de culoare 1 (și deci $n - \nu$ de culoare 2) atunci din (3) rezultă

$$p_1^{(n+1)} = \frac{a_1 + \nu d}{M + nd} = \frac{p_1 + \nu\gamma}{1 + n\gamma},$$

$$p_2^{(n+1)} = \frac{a_2 + (n - \nu)\, d}{M + nd} = \frac{p_2 + (n - \nu)\,\gamma}{1 + n\gamma},$$

unde

$$p_j = \frac{a_j}{M},\ j = 1, 2 \text{ și } \gamma = \frac{d}{M}.$$

Dacă extracția de rang $n + 1$ dă o bilă de culoare 1, probabilitățile corespunzătoare extracției următoare vor fi

$$p_1^{(n+2)} = \frac{a_1 + (\nu + 1)\, d}{M + (n + 1)\, d} = \frac{p_1 + (\nu + 1)\,\gamma}{1 + (n + 1)\,\gamma}.$$

Dacă bila a fost de culoare 2, atunci

$$p_1^{(n+2)} = \frac{a_2 + \nu\, d}{M + (n + 1)\, d} = \frac{p_1 + \nu\,\gamma}{1 + (n + 1)\,\gamma}.$$

În primul caz, obținem

$$p_1^{(n+2)} = \frac{\gamma}{1 + (n + 1)\,\gamma} + \frac{1 + n\gamma}{1 + (n + 1)\,\gamma}\, p_1^{(n+1)},$$

iar în al doilea

$$p_1^{(n+2)} = \frac{1 + n\gamma}{1 + (n + 1)\,\gamma}\, p_1^{(n+1)}.$$

Obținem așadar un lanț cu legături complete alternativ variabil, simplu și liniar.

O b s e r v a ț i e. O schemă de contagiune analogă se obține cînd $d_1 \neq d_2$; nu vom insista însă asupra acestui caz.

Dacă în schema descrisă ținem seama și de rezultatul extracției de rang $n + 2$, putem elimina pe n și să obținem un lanț cu legături complete staționar de multiplicitate doi. Într-adevăr, pentru simplificarea scrisului, fie $d = 1$ și presupunem că extracțiile de rang $n + 1$ și $n + 2$ au dat ambele o bilă de culoare 1; atunci

$$p_1^{(n+1)} = \frac{a_1 + \nu}{M + n},\ p_1^{(n+2)} = \frac{a_1 + \nu + 1}{M + n + 1},$$

$$p_1^{(n+3)} = \frac{a_1 + \nu + 2}{M + n + 2}$$

sau, ceea ce este echivalent,

$$p_1^{(n+1)} = \frac{a_1^{(n+1)}}{a_1^{(n+1)} + a_2^{(n+2)}},\ p_1^{(n+2)} = \frac{a_1^{(n+1)} + 1}{a_1^{(n+1)} + a_2^{(n+1)} + 1},$$

$$p_1^{(n+3)} = \frac{a_1^{(n+1)} + 2}{a_1^{(n+1)} + a_2^{(n+1)} + 2}.$$

Eliminînd pe $a_1^{(n+1)}$ și $a_2^{(n+1)}$ în relațiile de mai sus, obținem

$$p_1^{(n+3)} = \frac{2p_1^{(n+2)} - p_1^{(n+1)}\, p_1^{(n+2)} - p_1^{(n+1)}}{1 + p_1^{(n+2)} - 2p_1^{(n+1)}}. \tag{4}$$

În mod analog, dacă extracțiile de rang $n+1$ și $n+2$ au furnizat respectiv:

a) o bilă de culoare 1 și o bilă de culoare 2;

b) o bilă de culoare 2 și o bilă de culoare 1;

c) două bile de culoare 2,

atunci obținem respectiv relațiile

a) $$p_1^{(n+1)} = \frac{a_1^{(n+1)}}{a_1^{(n+1)} + a_2^{(n+1)}},\quad p_1^{(n+2)} = \frac{a_1^{(n+1)} + 1}{a_1^{(n+1)} + a_2^{(n+1)} + 1},$$

$$p_1^{(n+3)} = \frac{a_1^{(n+1)} + 1}{a_1^{(n+1)} + a_2^{(n+1)} + 2};$$

b) $$p_1^{(n+1)} = \frac{a_1^{(n+1)}}{a_1^{(n+1)} + a_2^{(n+1)}},\quad p_1^{(n+2)} = \frac{a_1^{(n+1)}}{a_1^{(n+1)} + a_2^{(n+1)} + 1},$$

$$p_1^{(n+3)} = \frac{a_1^{(n+1)} + 1}{a_1^{(n+1)} + a_2^{(n+1)} + 2};$$

c) $$p_1^{(n+1)} = \frac{a_1^{(n+1)}}{a_1^{(n+1)} + a_2^{(n+1)}},\quad p_1^{(n+2)} = \frac{a_1^{(n+1)}}{a_1^{(n+1)} + a_2^{(n+1)} + 1},$$

$$p_1^{(n+3)} = \frac{a_1^{(n+1)}}{a_1^{(n+1)} + a_2^{(n+1)} + 2}$$

și deci

a) $$p_1^{(n+3)} = \frac{p^{(n+2)} - p_1^{(n-1)}\, p_1^{(n+2)}}{1 + p_1^{(n+2)} - 2p_1^{(n+1)}},$$

b) $$p_1^{(n+3)} = \frac{p_1^{(n+1)}\, p_1^{(n+2)} + p_1^{(n+1)} - p_1^{(n+1)}}{2p_1^{(n+1)} - p_1^{(n+2)}}, \tag{5}$$

c) $$p_1^{(n+3)} = \frac{p_1^{(n+1)}\, p_1^{(n+2)}}{2p_1^{(n+1)} - p_1^{(n+2)}}.$$

Relațiile (4) și (5) ne arată că în acest caz sîntem în prezența unui lanț cu legături complete staționar de multiplicitate doi.

O b s e r v a ț i e. Schema de mai sus nu este alta decît schema lui Markov și a fost obținută din particularizarea schemei lui Pólya. Anume, se dă o urnă U_1 cu a_1 bile de culoare 1 și a_2 bile de culoare 2 ($a_1 + a_2 = M$) a cărei compoziție se modifică după următoarea regulă: bila extrasă se înlocuiește cu două bile de aceeași culoare. Pentru $M = 2$, obținem

$$p_1^{(n+1)} = \frac{a_1^{(n+1)}}{n+2}, \quad p^{(n+2)} = \frac{a_1^{(n+1)} + 1}{n+3},$$

dacă extracția de rang $n + 1$ a furnizat o bilă de culoare 1, de unde eliminarea lui $a_1^{(n+1)}$ implică

$$p_1^{(n+2)} = \frac{n+2}{n+3} p_1^{(n+1)} + \frac{1}{n+3}.$$

Dacă în extracția de rang $n + 1$ s-a obținut o bilă de culoare 2, atunci

$$p_1^{(n+1)} = \frac{a_1^{(n+1)}}{n+2}, \quad \hat{p}_1^{(n+2)} = \frac{a_1^{(n+1)}}{n+3}$$

și deci

$$p_1^{(n+2)} = \frac{n+2}{n+3} p_1^{(n+1)},$$

adică obținem un lanț cu legături complete variabil simplu liniar.

e. *O schemă în progresie geometrică.* Această schemă se încadrează în schema generală de la punctul b). Fie $a_1 + a_2 = M$; dacă urna U_n are compoziția $(a_1^{(n)}, a_2^{(n)})$, atunci urna U_{n+1} va avea, respectiv, una din următoarele două compoziții, după cum în extracția de rang n s-a prezentat o bilă de culoare 1 sau 2:

$$(a_1^{(n)} + r^{n-1}\alpha, a_2^{(n)} + r^{n-1}\beta), \quad (a_1^{(n)} + r^{n-1}\gamma, a_2^{(n)} + r^{n-1}\delta),$$

în ipoteza că $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \in N^*$ verifică relația $\alpha + \beta = \gamma + \delta = \theta$. De aici urmează că indiferent de rezultatul extracției de rang n, în urna U_n se introduc în plus θr^{n-1} bile și deci urna U_n va conține

$$M + \theta + \theta r + \ldots + \theta r^{n-2} = M + \theta \frac{r^{n-1} - 1}{r - 1}$$

bile. Dacă $r = 3$ și $\theta = 2M$, atunci numărul de bile din urna U_n devine $3^{n-1} M$ și prin urmare

$$p_1^{(n)} = \frac{a_1^{(n)}}{3^{n-1} M}$$

și

$$p_1^{(n+1)} = \varphi\left(p_1^{(n)}\right) = \frac{a_1^{(n)} + \alpha 3^{n-1}}{3^n M} = \frac{1}{3} p_1^{(n)} + \frac{\alpha}{3M}$$

sau

$$p_1^{(n+1)} = \psi(p_1^{(n)}) = \frac{a_1^{(n)} + \alpha 3^{n-1}}{3^n M} = \frac{1}{3} p_1^{(n)} + \frac{\gamma}{3M},$$

după cum în experiența de rang n s-a prezentat o bilă de culoare 1 sau 2. Obținem în definitiv un lanț cu legături complete staționar liniar.

§ 2. Teoreme ergodice. Teoreme limită

Comportarea asimptotică a probabilității totale a ridicat numeroase probleme teoretice, care au fost rezolvate de O. Onicescu și G. Mihoc prin teorema lor ergodică. Ulterior, R. Fortet a aplicat în teza sa teoria operatorilor liniari la studiul lanțurilor cu legături complete, obținînd teoreme care dau expresii efective pentru iteratele unor anumite expresii și care sînt apoi folosite la analiza structurii ergodice a lanțurilor cu legături complete liniare alternative.

O altă problemă esențială în studiul proceselor aleatoare o constituie problema convergenței către o lege limită normală. Ea este tratată în cazul lanțurilor cu legături complete care verifică anumite condiții, folosind la cercetarea ei așa-numita metodă a funcției caracteristice, folosită de O. Onicescu și G. Mihoc în studiul lanțurilor Markov simple și multiple.

1. Teorema ergodică a lui O. Onicescu și G. Mihoc

Enunțul teoremei ergodice și observații asupra ipotezelor făcute. În cele ce urmează vom folosi definițiile și notațiile introduse în capitolul I.

Teorema 1. *Să considerăm un lanț cu legături complete staționar și să presupunem că sînt verificate următoarele condiții:*

(i) *funcțiile fundamentale* $\varphi_{ij}(p)$, $1 \leqslant i \leqslant m+1$, $1 \leqslant j \leqslant m$ *sînt definite și continue în domeniul* Δ *și verifică condițiile*

$$0 < \varphi_{ij}(p) < 1; \tag{1}$$

(ii) *funcțiile fundamentale* $\varphi_{ij}(p)$, $1 \leqslant i \leqslant m+1$, $1 \leqslant j \leqslant m$ *admit derivate parțiale de ordinul întîi continue, verificînd condiția*

$$\sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\partial \varphi_{ij}(p)}{\partial p_k} \right| < 1$$

pentru orice k, $1 \leqslant k \leqslant m$;

(iii) *cel puțin o aplicație* φ_{i_0} *admite un punct unic de atracție în interiorul lui* Δ.

În aceste condiții, lanțul cu legături complete considerat este ergodic.

Din teorema 1, deducem pentru un lanț alternativ

Teorema 2. *Să considerăm un lanț cu legături complete alternativ staționar, ale cărui functii fundamentate verifică următoarele condiții:*

(i') *funcțiile* $\varphi(p)$ *și* $\psi(p)$ *sînt definite și continue în domeniul* $0 \leqslant p \leqslant 1$ *și verifică relațiile*

$$0 < \varphi(p) < 1, \quad 0 < \psi(p) < 1;$$

(ii') *funcțiile* $\varphi(p)$ *și* $\psi(p)$ *admit derivate continue în intervalul* $0 \leqslant p \leqslant 1$, *verificînd condiția*

$$\left|\frac{d\varphi}{dp}\right| < 1, \left|\frac{d\psi}{dp}\right| < 1.$$

În aceste condiții, lanțul cu legături complete considerat este ergodic.

Condiția (iii) este verificată deoarece în condițiile (ii') φ și ψ constituie contracții și deci iteratele aplicațiilor

$$p' = \varphi(p), \quad p' = \psi(p)$$

conduc la limită către două constante independente de p.

O b s e r v a ț i e. Înainte de a trece la demonstrarea teoremei 1, să facem cîteva observații asupra condițiilor teoremei 1.

1) Condiția (i) se întîlnește în studiul lanțurilor Markov, unde (ii) și (iii) sînt banale.

2) Condițiile teoremei 1 sînt foarte apropiate de cele necesare și suficiente. De exemplu, condiția (iii) pare să fie necesară. Pentru aceasta, să luăm o schemă în care (iii) nu are loc, și anume un lanț alternativ (vezi notațiile corespunzătoare în cap. I, § 1, 2). Dacă folosim notația $\alpha^* = 1 - \alpha$, $\alpha \in [0, 1]$, atunci

$$P^{(2)}(p) = p\varphi_1(p) + p^*\varphi_2(p),$$

$$P^{(3)}(p) = p\varphi_1(p)\varphi_{11}(p) + p\varphi_1^*(p)\varphi_{12}(p) + p^*\varphi_2(p)\varphi_{21}(p) + p^*\varphi_2^*(p)\varphi_{22}(p),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P^{(n)}(p) = \sum_{\substack{j_r=1,2 \\ 1\leqslant r\leqslant n-1}} p_{j_1 \cdots j_{n-1}}(p)\varphi_{j_1 \cdots j_{n-1}}(p),$$

unde $p_{i_1 \ldots j_{n-1}}(p)$ reprezintă probabilitatea ca

$$\xi_1 = \omega_{j_1}, \ldots, \xi_{n-1} = \omega_{j_{n-1}}.$$

Deoarece

$$\sum_{\substack{j_r=1,2 \\ 1\leqslant r\leqslant n-1}} p_{j_1 \ldots j_{n-1}}(p) = 1,$$

rezultă că $P^{(n)}(p)$ este cuprins între cea mai mică și cea mai mare valoare a lui $\varphi_{j_1 \ldots j_{n-1}}(p)$. Să considerăm atunci un pătrat $ABCD$ cu diagonala AC situată pe prima bisectoare a axelor OP și OQ și să presupunem că

curbele $q = \varphi(p)$ și $q = \psi(p)$ se găsesc în interiorul pătratului considerat, pentru orice p, $a < p < b$, adică

$$a < \varphi(p) < b,\ a < \psi(p) < b,\ a < p < b.$$

Repetînd aceste inegalități, rezultă că

$$a < \varphi_{j_1 \ldots j_{n-1}}(p) < b, \quad a < p < b,$$

ceea ce implică

$$a < P^{(n)}(p) < b, \quad a < p < b.$$

Să considerăm acum un alt pătrat $A'B'C'D'$, construit în condiții similare, pentru care

$$a' < \varphi(p') < b',\ a' < \psi(p') < b',\ a' < p' < b',$$

ceea ce implică

$$a' < P^{(n)}(p) < b',\ a' < p' < b'.$$

Prin urmare, cu toate că funcțiile φ și ψ sînt continue și cuprinse între 0 și 1 pentru orice p, principiul ergodic nu are loc, deoarece probabilitățile $P^{(n)}(p)$ și $P^{(n)}(p')$ diferă între ele cel puțin prin valoarea finită $a' - b$, neputînd deci avea aceeași valoare pentru $n \to \infty$.

Demonstrația teoremei. Demonstrația constă în a arăta mai întîi că funcțiile $P_i^{(n)}(p)$ formează o familie egal continuă, de unde se va deduce existența limitei unui subșir în virtutea criteriului lui Arzelà pentru funcții reale. Se arată apoi că toate funcțiile limită sînt egale cu niște constante.

a. *Egal continuitatea funcțiilor* $P_i^{(n)}(p)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $n \in N^*$. Derivînd relația funcțională (2), (cap. I, § 2) în raport cu p_k, obținem

$$\frac{\partial P_i^{(n+1)}(p)}{\partial p_k} = P_i^{(n)}(\varphi_k(p)) - P_i^{(n)}(\varphi_{m+1}(p)) + \sum_{j=1}^{m+1} p_j \left(\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial P_i^{(n)}}{\partial \varphi_{j,l}} \frac{\partial \varphi_{j,l}}{\partial p_k} \right)$$

de unde rezultă că

$$\left| \frac{\partial P_i^{(n+1)}(p)}{\partial p_k} \right| \leqslant \left| P_i^{(n)}(\varphi_k(p)) - P_i^{(n)}(\varphi_{m+1}(p)) \right| + \sum_{j=1}^{m+1} p_i \left(\sum_{l=1}^{m} \left| \frac{\partial P_i^{(n)}}{\partial \varphi_{j,l}} \right| \left| \frac{\partial \varphi_{j,l}}{\partial p_k} \right| \right) \quad (2)$$

și, dacă ținem seama de ipoteze,

$$\left| \frac{\partial \varphi_{j,l}}{\partial p_k} \right| < 1 < \lambda, \quad \lambda = \frac{1}{1 - \Lambda},$$

unde

$$\sum_{=1}^{m} \left| \frac{\partial \varphi_{j,l}}{\partial p_k} \right| < \Lambda < 1.$$

Dacă presupunem că

$$\left|\frac{\partial P_i^{(n)}}{\partial p_k}\right| \leqslant \lambda, \tag{3}$$

atunci din (2) rezultă că

$$\left|\frac{\partial P_i^{(n+1)}}{\partial p_k}\right| \leqslant 1 + \lambda\Lambda = \lambda$$

și deoarece relația (3) are loc pentru $n = 1$, ea este adevărată pentru orice n. În acest caz, în virtutea teoremei creșterilor finite, avem pentru orice două puncte $p, q \in \Lambda$

$$\left| P_i^{(n)}(p) - P_i^{(n)}(q)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \left| p_j - q_j \right| \left|\frac{\partial P_i^{(n)}(p)}{\partial P_j}\right|_{p=r} \leqslant \lambda \sum_{j=1}^{m} \left| p_j - q_j \right|,$$

unde $r = (r_1, \ldots, r_m)$ este un punct situat în intervalul m-dimensional generat de $p = (p_1, \ldots, p_m)$ și $q = (q_1, \ldots, q_m)$. Fiind dat însă un $\varepsilon > 0$ arbitrar, obținem

$$| P_i^{(n)}(p) - P_i^{(n)}(q) | < \varepsilon$$

pentru orice $n \leqslant N^*$ și $1 \leqslant i \leqslant m$, îndată ce

$$| p_j - q_j | < \delta = \frac{\varepsilon}{m\lambda}.$$

b. *Existența funcțiilor limită pentru șirul* $(P_i^{(n)}(p))_{n \in N^*}$. Din proprietatea de egal continuitate a funcțiilor $P_i^{(n)}(p)$ rezultă că se poate extrage un subșir $(P_i^{(\nu_k)}(p))_{k \in N^*}$ care să tindă uniform către o funcție limită continuă $P_i^{(\nu)}(p)$.

Să considerăm mărimile

$$\bar{P}_i^{(n)} = \sup_{p \in \Delta} P_i^{(n)}(p),$$

$$\underline{P}_i^{(n)} = \inf_{p \in \Delta} P_i^{(n)}(p).$$

Ținînd seama de relația funcțională (2) (cap. I, § 2), rezultă că $(\bar{P}_i^{(n)})_{n \in N^*}$ și $(\underline{P}_i^{(n)})_{n \in N^*}$ formează un șir monoton descrescător, respectiv monoton crescător, și că

$$\bar{P}_i^{(n)} \leqslant \bar{P}_i^{(1)} < 1, \quad \underline{P}_i^{(n)} \geqslant \underline{P}_i^{(1)} > 0, \quad \bar{P}_i^{(n)} > \underline{P}_i^{(n)}, \quad n \in N^*.$$

Fie atunci

$$\bar{P}_i = \lim_{n \to \infty} \bar{P}_i^{(n)} \text{ și } \underline{P}_i = \lim_{n \to \infty} P_i^{(n)},$$

unde

$$\bar{P}_i < 1, \underline{P}_i > 0, \bar{P}_i - \underline{P}_i = \delta_i \geqslant 0.$$

În aceste condiții numerele $\bar{P}_i$ și $\underline{P}_i$ reprezintă, respectiv, marginile superioară și inferioară ale funcției limită $P_i^{(\nu)}(p)$ și ale oricărei alte funcții limită a șirului $(P_i^{(n)}(p))_{n\in N^*}$. Se observă că folosind relația funcțională (2) (cap. I, § 2) și șirul $(P_i^{(\nu_k)}(p))_{k\in N^*}$ se poate construi un alt șir care admite de asemenea o limită. Într-adevăr, obținem

$$P_i^{(\nu+1)}(p) = \sum_{j=1}^{m+1} p_j P_i^{(\nu)}(\varphi_j(p))$$

și prin urmare

$$P_i^{(\nu+1)} - P_i^{(\nu_k+1)} = \sum_{j=1}^{m} p_j \left[P_i^{(\nu)}(\varphi_j(p)) - P_i^{(\nu_k)}(\varphi_j(p))\right].$$

Dacă acum $\varepsilon > 0$ arbitrar este dat, există un întreg astfel încît pentru $k > k_\varepsilon$ să avem

$$\left| P_i^{(\nu)}(\varphi_j(p)) - P_i^{(\nu_k)}(\varphi_j(p)) \right| < \varepsilon.$$

Deoarece $\sum_{j=1}^{m+1} p_j = 1$, rezultă că

$$\left| P_i^{(\nu+1)}(p) - P_i^{(\nu_{k+1})}(p) \right| < \varepsilon,$$

adică

$$\lim_{k\to\infty} P_i^{(\nu_{k+1})}(p) = P_i^{(\nu+1)}(p).$$

În mod cu totul analog se poate construi un șir $(P_i^{(\nu+r)}(p)); r \in N^*$ de funcții limită care sînt continue în Δ și care admit toate aceeași margine superioară $\bar{P}_i$ și aceeași margine inferioară $\underline{P}_i$.

c. *Unicitatea funcției limită.* Ținînd seama de relația funcțională a probabilității totale, funcția limită $P_i^{(\nu+r)}(p)$ poate fi scrisă sub forma

$$P_i^{(\nu+r)}(p) = \sum_{\substack{j_l=1 \\ 1\leqslant l\leqslant r}}^{m+1} p_{j_1} \varphi_{j_1 j_2}(p)\, \varphi_{j_1 j_2 j_3}(p) \dots \varphi_{j_1 \dots j_r}(p)\, P_i^{(\nu)}(\varphi_{j_1 \dots j_r}(p)). \tag{4}$$

Pe de altă parte, evident,

$$\sum_{\substack{j_l=1 \\ 1\leqslant l\leqslant r}}^{m+1} p_{j_1} \varphi_{j_1, j_2}(p)\, \varphi_{j_1 j_2 j_3}(p) \dots \varphi_{j_1 \dots j_{r-1}},\ j_r(p) = 1. \tag{5}$$

Să ținem acum seama de condiția (1); în acest caz există a astfel încît

$$0 < a < \varphi_{i,j}(p) < 1 - a < 1$$

pentru orice $1 \leqslant i \leqslant m+1$ și $1 \leqslant j \leqslant m$; vom nota acest domeniu pe scurt cu Δ_a și vom observa că punctul de atracție considerat în condiția (iii) se găsește în Δ_a.

Fie acum $p' \in \Delta_a$ un punct în care funcția $P_i^{(\nu+r)}(p)$ ia cea mai mare valoare. Ținînd seama de (5), în Δ_a avem verificată inegalitatea

$$p_{j_1} \varphi_{j_1 j_2}(p)\, \varphi_{j_1 j_2 j_3}(p) \dots \varphi_{j_1 \dots j_{r-1}, j_r}(p > 0,$$

ceea ce implică faptul că (4) se reduce la

$$P_i^{(\nu+r)}(p') = P_i^{(\nu)}(\varphi_{j_1 \dots j_r}(p')). \tag{6}$$

Dacă acum $p'' \in \Delta_a$ reprezintă un punct în care $P_i^{(\nu+r)}(p)$ ia cea mai mică valoare în Δ_a, vom avea în mod analog

$$P_i^{(\nu+r)}(p'') = P_i^{(\nu)}(\varphi_{j_1 \dots j_r}(p'')). \tag{7}$$

Să alegem acum în relațiile (6) și (7) toți indicii egali cu i_0, unde i_0 este dat de condiția (iii) a teoremei 1. În acest caz obținem

$$P_i^{(\nu+r)}(p') = P_i^{(\nu)}(\varphi_{i_0 \dots i_0}(p')),$$
$$P_i^{(\nu+r)}(p'') = P_i^{(\nu)}(\varphi_{i_0 \dots i_0}(p''))$$

și cum din (iii) rezultă că

$$\varphi_{i_0 i_0 \dots i_0,}\, e(p) \to \widetilde{P}_l,\ 1 \leqslant l \leqslant m,$$

cînd $r \to \infty$ funcțiile $P_i^{(\nu-r)}(p)$ fiind egal continue și $\varepsilon > 0$ dat arbitrar există $\eta > 0$, astfel încît

$$|P_i^{(\nu+r)}(q'') - P_i^{(\nu)}(q')| < \varepsilon$$

îndată ce

$$|q_j'' - q_j'| < \eta,\quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Pentru r suficient de mare însă

$$|\varphi_{i_0 \dots i_0, l}(p'') - \varphi_{i_0 \dots i_0, l}(p')| < \varepsilon,\quad 1 \leqslant l \leqslant m,$$

și deci

$$|P_i^{(\nu)}(\varphi_{i_0 \dots i_0}(p'')) - P_i^{(\nu)}(\varphi_{i_0 \dots i_0}(p'))| < \varepsilon,\quad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

ceea ce implică

$$|P_i^{(\nu-r)}(p'') - P_i^{(\nu+r)}(p')| < \varepsilon,\quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Fie acum $\bar{P}_i(a)$ și $\underline{P}_i(a)$ marginea superioară, respectiv inferioară, a funcției $P_i^{(\nu+r)}(p)$ în Δ_a; în acest caz

$$\bar{P}_i(a) = P_i^{(\nu+r)}(p'),\quad \underline{P}_i(a) = P_i^{(\nu+r)}(p''),$$

de unde rezultă că

$$\bar{P}_i(a) - \underline{P}_i(a) < \varepsilon$$

pentru orice $\varepsilon > 0$ arbitrar, adică $\overline{P}_i(a) = \underline{P}_i(a)$, ceea ce implică faptul că funcția $P_i^{(\nu)}(p)$ se reduce la o constantă P_i în Δ_a; acum a a fost arbitrar de mic, această concluzie rămîne valabilă și în Δ. Cu alte cuvinte,

$$\lim_{n\to\infty} P_i^{(n)}(p) = P_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m+1,$$

adică tocmai proprietatea de ergodicitate cerută.

2. Lanțuri liniare alternative

Conform definiției 3 (cap. I, § 1), pentru un lanț cu legături complete liniar avem

$$\varphi_{i,j}^{(n)}(p_1^{(n)}, \ldots, p_m^{(n)}) = a_0^n + \sum_{k=1}^{m} a_k^{(n)} p_k^{(n)},$$

unde $a_k^{(n)}$, $0 \leqslant k \leqslant m$, $n \in N^*$, sînt constante care depind, evident, de i, j. În cele ce urmează ne vom ocupa de un caz particular, și anume de un lanț cu legături complete staționar liniar alternativ. În această condiție

$$\varphi_{1,1}(p) = \varphi(p) = ap + b, \quad \varphi_{1,2} = 1 - \varphi(p) = 1 - ap - b,$$
$$\varphi_{2,1}(p) = \psi(p) = cp + d, \quad \varphi_{2,2} = 1 - \psi(p) = 1 - cp - d.$$

Pentru ca un lanț cu legături complete liniar să fie ergodic trebuie mai întîi ca condiția (i') din teorema 2 (§ 1) să fie satisfăcută:

$$0 < ap + b < 1, \quad 0 < cp + d < 1$$

pentru $0 \leqslant p \leqslant 1$, ceea ce implică

$$\begin{cases} 0 < b < 1, & \\ 0 < a + b < 1, & \text{și} \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 < d < 1 \\ 0 < c + d < 1. \end{matrix} \tag{1}$$

Condiția (ii') este verificată în virtutea lui (1)

$$|a| < 1, \quad |c| < 1. \tag{2}$$

Pe de altă parte, condiția (iii) este implicit satisfăcută; într-adevăr ea poate fi verificată direct și anume, dacă

$$q_1 = ap + b,$$
$$q_2 = a(a+b) + b = a^2 q + ab + b,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$q_{n+1} = a^{n+1} q + b(a^n + a^{n-1} + \ldots + 1),$$

atunci se vede că, deoarece $|a| < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} q_{n+1} = \frac{b}{1-a}.$$

În mod analog, cealaltă transformare admite drept punct de atracție pe $\frac{d}{1-c}$.

Rezultă deci că dacă au loc relațiile (1) și (2), lanțul cu legături complete considerate este ergodic. În particular, dacă $a = c = 0$, avem de-a face cu un lanț Markov, de asemenea ergodic.

Să considerăm cîteva exemple.

1) Fie

$$\varphi(p) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}, \quad \psi(p) = \frac{1}{2}p$$

pentru care $\varphi(1) = 1$. În acest caz, pentru orice n

$$P^{(n)}(p) = p$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)}(p) = p,$$

adică lanțul cu legături complete este semiergodic.

2) Lanțul atașat schemei din § 3 (cap. I, punctul 5) este ergodic.

3. Analiza unei scheme speciale

Să considerăm acum următoarea schemă, care se încadrează în schema generală expusă mai sus pentru $m = 1$, $a_1^{(n)} + a_2^{(n)} = M$. Anume, fie următoarea regulă după care se schimbă compoziția urnelor: dacă extracția de rang n a dat o bilă de culoarea 1, atunci noua compoziție va fi

$$a_1^{(n+1)} = a_1^{(n)} - d, \; a_2^{(n+1)} = a_2^{(n)} + d;$$

dacă în extracția de rang n s-a obținut o bilă de culoarea 2, atunci

$$a_1^{(n+1)} = a_1^{(n)} + d, \; a_2^{(n+1)} = a_2^{(n)} - d,$$

unde $d \neq 0$ este un întreg arbitrar. S-ar putea întîmpla însă ca folosind această regulă să fim conduși la numere negative, care ar reprezenta bile; în acest caz noua compoziție va fi $(0, M)$ sau $(M, 0)$ după cum se epuizează bilele de culoarea 1 sau 2.

Vom observa de asemenea că dacă $d < 0$, s-ar putea ca lanțul să se întrerupă, păstrîndu-se mereu aceeași compoziție $(0, M)$ sau $(M, 0)$ și deci

$$p^{(n+1)}(p) = 0 \text{ sau } P^{(n+1)}(p) = 1, \text{ dacă } n > n_0.$$

Dacă $\gamma = \frac{d}{M}$, funcțiile fundamentale corespunzătoare acestei scheme sînt.

$d > 0$

$$\begin{cases} \varphi(p^{(n)}) = \begin{cases} p^{(n)} - \gamma, & p^{(n)} \geqslant \gamma, \\ 0 & p^{(n)} < \gamma, \end{cases} \\ \psi(p^{(n)}) = \begin{cases} p^{(n)} + \gamma, & p^{(n)} \leqslant 1 - \gamma, \\ 1 & p^{(n)} > 1 - \gamma, \end{cases} \end{cases}$$

$d < 0$

$$\begin{cases} \varphi(p^{(n)}) = \begin{cases} p^{(n)} - \gamma, & p^{(n)} \leqslant 1 + \gamma, \\ 1, & p^{(n)} > 1 + \gamma, \end{cases} \\ \psi(p^{(n)}) = \begin{cases} p^{(n)} + \gamma, & p^{(n)} \geqslant \quad -\gamma, \\ 0, & p^{(n)} < \quad -\gamma, \end{cases} \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

adică generează un lanț cu legături complete constant simplu. Evident, funcțiile φ și ψ nu verifică condițiile teoremei 2 (§ 2).

Să presupunem că $d > 0$ și $\gamma \leqslant p \leqslant 1 - \gamma$, adică $d \leqslant a_1 \leqslant M - d$; atunci

$$P^{(n+1)}(p) = p\,P^{(n)}(p-\gamma) + (1-p)\,P^{(n)}(p+\gamma).$$

Dacă $\alpha = 1 - 2\gamma$, $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ $\left(0 < d < \frac{M}{2}\right)$, obținem din ecuația funcțională de mai sus

$$P^{(n+1)}(p) = p\alpha^n + \gamma\,(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \ldots + \alpha + 1),$$

adică

$$P^{(n+1)}(p) = \alpha^n\left(p - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}.$$

Evident, dacă $p = \frac{1}{2}$, atunci $P^{(n+1)} = \frac{1}{2}$ $(n \leqslant N^*)$. De asemenea, în condițiile de mai sus, $0 < \alpha < 1$ și prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n+1)}(p) = \frac{1}{2},$$

deci în anumite condiții la limită obținem un număr egal de bile de culorile 1 și 2.

Dacă am presupune că $0 < d$, $d > M$, atunci s-ar ivi următoarele două cazuri degenerate:

$$(a_1, a_2), (0, M), (M, 0), \ldots$$

$$(a_1, a_2), (M, 0), (0, M), \ldots$$

și evident lanțul cu legături complete este oscilant.

Structura ergodică a lanțurilor liniare alternative.

Fie ecuația probabilității totale pentru un lanț staționar alternativ

$$P^{(n+1)}(p) = pP^{(n)}(\varphi(p)) + (1-p)\,P^{(n)}(\psi(p));\ P^{(1)}(p) = p;\ 0 \leqslant p \leqslant 1 \quad (3)$$

și să considerăm o valoare λ, $|\lambda| \leqslant 1$, astfel încît să existe o soluție nenulă mărginită și continuă pentru ecuația

$$F(p) = \lambda[pF(\varphi(p)) + (1-p)F(\psi(p))],\ 0 \leqslant p \leqslant 1.$$

În cele ce urmează vom folosi următoarele proprietăți pe care ne mărginim numai să le enunțăm:

1)
$$|\lambda| = 1;$$

2) dacă cel puțin una din funcțiile $\varphi(p)$ sau $\psi(p)$ este diferită de 0 și 1 (exceptînd poate pentru $p = 0$ sau $p = 1$) și dacă posedă un punct de atracție unic, atunci $\lambda^2 = 1$.

Să trecem acum la cazul liniar alternativ; cu notațiile de la punctul 1

$$P^{(n+1)}(p) = p\,P^{(n)}(ap + b) + (1-p)\,P^{(n)}(cp + d), \quad (4)$$

unde

$$\begin{cases} 0 \leqslant b \leqslant 1 \\ 0 \leqslant a + b \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} 0 \leqslant d \leqslant 1, \\ 0 \leqslant c + d \leqslant 1. \end{cases}$$

Vom observa că dacă facem substituția $q = 1 - p$, atunci (4) se reduce la ecuația

$$\bar{P}^{(n+1)}(q) = q\bar{P}^{(n)}(cq + (1 - c - d)) + (1 - q)\bar{P}^{(n)}(aq + (1 - a - b)), \quad (5)$$

care este de același tip ca și (4) (numai că a se schimbă cu c, b cu $1 - c - d$, c cu a și d cu $1 - a - b$) și deci nu este necesară discutarea tuturor posibilităților.

Vom distinge mai multe cazuri:

1) $|a| < 1, |c| < 1$. Este suficient să rezolvăm ecuația (4) pentru $|p| \leqslant r, r \geqslant 1$, sau, punînd $p = rq$, să rezolvăm pentru $|q| \leqslant 1$ ecuația

$$\bar{P}^{(n+1)}(q) = rq\bar{P}^{(n)}\left(aq + \frac{b}{r}\right) + (1 - rq)\bar{P}^{(n)}\left(cq + \frac{d}{r}\right),$$

dacă $\bar{P}^{(n)}(q) = P^{(n)}(rp)$. Pentru r suficient de mare însă

$$\left|aq + \frac{b}{r}\right| < 1, \left|cq + \frac{d}{r}\right| < 1, |q| \leqslant 1,$$

și deci putem scrie, în virtutea teoremei 2 (§ 1),

$$P^{(n+1)}(p) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\sum_{l=0}^{m_i} P^{(i,l)}(p)\, n^l}{\lambda_i^n} + \tilde{P}^{(n)}(p), \quad (6)$$

pentru $|p| \leqslant r$, dacă revenim la variabila p. Considerînd un $r' > r$ se poate deduce o dezvoltare analogă, de unde rezultă că relația (6) are loc pentru orice p.

Dacă acum λ este una din valorile λ_i, $|\lambda_i| \leqslant 1$, atunci lui λ îi corespunde cel puțin o funcție $F(p)$ olomorfă și neidentică nulă pentru care

$$F(p) = \lambda[pF(ap + b) + (1 - p)F(cp + d)], \quad (7)$$

și deci $|\lambda| = 1$ și $m_i = 0$, dacă ținem seama de proprietățile menționate mai sus.

Se disting două subcazuri:

1_1) $a = c = 0$. În acest caz lanțul cu legături complete se reduce la lanț Markov și, în consecință nu mai insistăm asupra lui.

1_2) Cel puțin unul din numerele a și c este diferit de zero. Să presupunem că $a \neq 0$; în acest caz, $\varphi(p)$ admite un punct de atracție și $\varphi(p) \neq 0$ sau 1 afară poate pentru $p = 0$ sau 1, ceea ce implică $\lambda^2 = 1$, de unde rezultă $\lambda = 1$ sau $\lambda = -1$. Dacă ținem seama de (7), sau $F(p) = \text{const.}$ și deci $\lambda = 1$, sau $F(p) \neq \text{const.}$ Dar deoarece λ este real, se poate presupune că $F(p)$ este tot o funcție reală și fie p_0 un punct în care $|F(p)|$ își atinge

maximul ($p_0 = 0$ și $p_0 = 1$). În acest caz însă maximul este atins într-o infinitate de puncte obținute prin aplicarea lui φ și ψ lui p_0 (afară de cazul cînd p_0 este chiar punctul de atracție comun al lui φ și ψ și deci în virtutea teoremei 2, § 1, $F(p)$ este o constantă) și deoarece $F(p)$ este o funcție reală și olomorfă, urmează că se reduce la o constantă; rezultă deci că $|F(p)|$ își atinge maximul numai pentru $p_0 = 0$, sau $p_0 = 1$. După un raționament analog și pentru minimul lui $|F(p)|$, obținem

$$F(0) = \lambda F(d); \quad F(1) = \lambda F(a + b),$$

de unde urmează că $d = 0$, $a + b = 1$, $\lambda = 1$. Prin urmare, λ nu poate lua decît valoarea 1.

Rezultă de aici că lanțul este ergodic afară de cazul cînd $d = 0$, $a + b = 1$; în acest caz se demonstrează însă că există o funcție $F(p)$ care verifică relația (7) cu $\lambda = 1$, adică lanțul este semiergodic.

2) $a = 1$. Distingem trei subcazuri:

2_1) $c = 1$. În acest caz $P^{(n)}(p) = 0$ pentru orice $n \in N^*$ și deci lanțul este semiergodic.

2_2) $c = -1$. Rezultă $\psi(p) = 1 - p$ și deci $\varphi_{j_1 \dots j_n}(p)$ (vezi § 1, 2) poate lua numai valorile p și $1 - p$. Fie $\varphi_{j'_1 \dots j'_n}(p)$ și $\varphi_{j''_1 \dots j''_n}(p)$ respectiv acele expresii care dau pe p și $1 - p$ și să introducem notațiile

$$\pi_1^{(n)}(p) = \sum_{\substack{j'_s = 1,2 \\ 1 \leqslant s \leqslant n}} p_{j'_1 \dots j'_n}(p), \quad \pi_2^{(n)}(p) = \sum_{\substack{j''_s = 1,2 \\ 1 \leqslant s \leqslant n}} p_{j''_1 \dots j''_n}(p).$$

Dacă ținem seama de cap. I, § 4, rezultă că $\pi_1^{(n)}(p)$ și $\pi_2^{(n)}(p)$ reprezintă probabilitățile ca probabilitatea absolută $p^{(n)}$ să ia, respectiv, valorile p și $1 - p$; deoarece însă șirul $(p^{(n)})_{n \in N^*}$ formează un lanț Markov de matrice

$$\begin{pmatrix} p & 1 - p \\ p & 1 - p \end{pmatrix}$$

există evident limitele

$$\pi_i(p) = \lim_{n \to \infty} \pi_i^{(n)}(p), \quad i = 1, 2,$$

și deci din (5) (§ 2) rezultă că $P^{(n)}(p)$ tinde către o limită care depinde de p, egală cu

$$P(p) = p\pi_1(p) + (1 - p)\pi_2(p).$$

Lanțul este deci semiergodic.

2_3) $|c| < 1$. Se observă mai întîi că $P^{(n+1)}(1) = P^{(n)}(1) = 1$. Vom distinge mai multe subcazuri.

2_{3_1}) $d < 1$, $c + d < 1$. Fie α un număr astfel încît $cp + d \leqslant \alpha$ pentru orice p și Δ_α domeniul $0 \leqslant p \leqslant 1 - \alpha$. Deoarece ψ admite punctul de

atracție $\frac{d}{1-c}$ în Δ_α și $\|\varphi\| = 1$, $\|\psi\| = |c| < 1$, urmează că $P^{(n)}(p)$ tinde către $\frac{d}{1-c}$ pentru $p \neq 1$.

Rezultă că lanțul este semiergodic.

2_{3_2}) $d = 1$, $c + d < 1$. Rezultă că $c + d > 0$ și fie α astfel încît $\alpha \leqslant cp + d$ pentru orice p. Vom nota că $\Delta_{\alpha,\beta}$, domeniul definit de relația $\alpha \leqslant p \leqslant \beta\,(\beta > \alpha)$; pe $\Delta_{\alpha,\beta}$, funcțiile $1 - \varphi$ și $1 - \psi$ sînt strict pozitive și deci în mod analog rezultă că $P^{(n)}(p)$ tinde către $\frac{d}{1-c} = \frac{1}{1-c}$ pentru $0 < p < 1$ și $P^{(n+1)}(0) = P^{(n)}(1)$ și deci $P^{(n)}(0)$ tinde către 1. Lanțul este semiergodic.

2_{3_2}) $d < 1$, $c + d = 1$. Rezultă că $0 < d$ și fie $p_0 = p$, $(p_n)_{n \in N^*}$ iteratele lui p prin ψ, unde p_n tinde uniform către 1. Fie n_ε un întreg pentru care $1 - \varepsilon \leqslant P^{(1)}(p_n) \leqslant 1$, $n > n_\varepsilon$; în acest caz, relația (5) devine

$$P^{(n+1)}(p) = \sum_{j \in N} A_j^{(n)}(p)\, P^{(1)}(p_j) = \sum_{j=0}^{n_\varepsilon} A_j^{(n)}(p)\, P^{(1)}(p_j) + \\ + \sum_{j > n_\varepsilon} A_j^{(n)}(p)\, P^{(1)}(p_j),$$

unde $A_j^{(n)}(p)$ este suma $a\,C_n^j$ termeni în care fiecare termen este un produs de n factori de forma p_i sau $1 - p_k$, $i, k \leqslant j$; există atunci un număr $n < 1$, astfel încît $p_i \leqslant h$, $1 - p_k \leqslant h$, pentru $i, k \leqslant n_\varepsilon$, iar h poate fi luat independent de p în domeniul $0 < \alpha \leqslant p \leqslant 1 - \alpha < 1$, α fiind un număr arbitrar de mic. Rezultă că

$$A_j^{(n)}(p) \leqslant C_n^j h^n, \quad j \leqslant n_\varepsilon$$

și deci

$$A_j^{(n)}(p) \to 0$$

o dată cu $\frac{1}{n}$, uniform în raport cu j și p. Prin urmare, în domeniul $\alpha < p < 1 - \alpha$, $P^{(n)}(p)$ tinde uniform către 1; pe de altă parte, observăm că $P^{(n+1)}(0) = P^{(n)}(d)$ și deci $P^{(n)}(0)$ tinde către 1. Lanțul este ergodic.

2_{3_4}) $d = 1$, $c + d = 1$. Un raționament analog conduce la faptul că $P^{(n)}(p)$ tinde uniform către 1. Lanțul este ergodic.

3) $a = -1$. Distingem trei subcazuri:

3_1) $c = -1$. Rezultă imediat că $P^{(2n+1)}(p) = p$ și $P^{(2n)}(p) = 1 - p$. Lanțul este oscilant.

3_2) $0 < |c| < 1$.

3_{2_1}) $0 < d < 1$, $0 < c + d < 1$. Expresia $P^{(n)}(p)$ tinde către o limită P_1 independentă de p. Lanțul este ergodic.

3_{2_2}) $d = 0$, $0 < c < 1$. Expresia $P^{(n)}(p)\, C_1$ — tinde către o limită P independentă de p.

3_{2_a}) $d = 1$, $0 > c > -1$. Expresia $P^{(2n+1)}(p)$ C_1 — tinde către o limită $P^1(p)$ și $P^{(2n)}(p)$ C_1 — tinde către o limită $P^2(p)$.

3_{2_b}) $c + d = 0$, $0 \leqslant d < 1$. Expresia $P^{(n)}(p)$ C_1 — tinde către o limită P independentă de p.

3_{2_c}) $c + d = 1$, $0 < d < 1$. Expresia $P^{(n)}(p)$ C_1— tinde către limită P independentă de p.

3_3) $c = 1$. Lanțul considerat se reduce la un lanț Markov (vezi cazul 2_2).

3_{3_1}) $d \neq 1$. Expresia $P^{(n)}(p)$ tinde către o limită P independentă de p. Lanțul este ergodic.

3_{3_2}) $d = 1$. Expresiile $P^{(2n)}(p)$ și $P^{(2n+1)}(p)$ tind, respectiv, către limitele distincte $P^1(p)$ și $P^2(p)$, limite ce depind de p. Lanțul este oscilant.

4. Comportarea asimptotică a unui sistem circular de urne. Legea numerelor mari

Să reluăm exemplul dat mai sus pentru cazul $d = 1$. Această schemă poate fi interpretată astfel: dintr-o urnă cu a_1 bile de culoare 1 și a_2 bile de culoare 2 ($a_1 + a_2 = M$) se efectuează extracții și după fiecare extracție se înlocuiește bila extrasă cu o bilă de culoare contrarie. O interpretare echivalentă este următoarea: fie o urnă inițială cu M bile de culoare 1 și 2 și să considerăm șirul de $M + 1$ urne cu următoarele compoziții:

$$(0, M) \quad (1, M-1), \ldots, (M-1, 1), \quad (M, 0).$$

Evident, urna inițială considerată va fi situată într-un anumit loc în acest șir. Dacă bila extrasă din această urnă a fost de culoare 1, extracția următoare se va face din urna precedentă, iar dacă bila a fost de culoare 2, ea se va face din urna care urmează. Obținem astfel un sistem circular de urne.

Să presupunem că urna inițială are compoziția (a_1, a_2), $a_1 + a_2 = M$. Dacă ν este numărul de bile de culoare 1 obținute în n extracții, atunci după aceste extracții urna va avea compoziția $(a - 2\nu + n, a_2 + 2\nu - n)$. Dar

$$0 \leqslant a_1 - 2\nu + n \leqslant a_1 + a_2,$$

$$0 \leqslant a_2 + 2\nu - n \leqslant a_1 + a_2,$$

de unde rezultă

$$-\frac{a_2}{2n} \leqslant \frac{\nu}{n} - \frac{1}{2} \leqslant \frac{a_1}{2n}$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu}{n} = \frac{1}{2}.$$

Pe de altă parte, se poate vedea că

$$P^{(n+1)}(p) = \frac{1}{2} + \left(\frac{a_1}{a_1 + a_2} - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{2}{a_1 + a_2}\right)^n,$$

ceea ce implică

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)}(p) = \frac{1}{2}.$$

Rezultă în definitiv că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu}{n} = \lim_{n\to\infty} P^{(n)}(p) = \frac{1}{2}.$$

Această relație pune în evidență pe un exemplu concret un aspect nou al legii numerelor mari, și anume frecvența $\frac{\nu}{n}$ tinde, pentru $n \to \infty$, către probabilitatea $\frac{1}{2}$ în sensul clasic al analizei.

5. Legi asimptotice pentru abateri

Schema de urne considerată posedă și alte proprietăți care diferă considerabil de cele obișnuite, întîlnite în teoria variabilelor aleatoare independente. Vom presupune că extracțiile încep dintr-o urnă care conține același număr par de bile de culoare 1 și de bile de culoare 2, adică $a_1 = a_2 = a = 2k$. Atunci abaterea $x = \nu - \frac{n}{2}$ va lua următoarele valori:

$$-k,\ -k+1,\ldots,\ -1,\ 0,1,\ldots,\ k-1,\ k \tag{1}$$

și

$$-k+\frac{1}{2},\ -k+\frac{3}{2},\ \ldots,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ldots,\ k-\frac{3}{2},\ k-\frac{1}{2} \tag{2}$$

după cum n este par sau impar.

Teoremă. *Fie* $P_{2n}(x)$ *probabilitatea abaterii* x *după* $2n$ *extracții, iar* $P_{2n-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ *— probabilitatea abaterii* $x-\frac{1}{2}$ *după* $2n-1$ *extracții. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} P_{2n}(x) = \frac{1}{2^{2a-1}} C_{2a}^{a-2x}$$

și

$$\lim_{n\to\infty} P_{2n+1}\left(x-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2a-1}} C_{2a}^{a-2x+1},$$

unde $a = 2k$.

Observație. M. Fréchet reduce studiul acestei scheme la studiul unui lanț Markov de natură particulară, obținînd rezultate analoge.

6. Deducerea legilor limită

Să stabilim o relație de recurență între $P_{2n}(x)$ și $P_{2n-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)$; pentru aceasta, fie ζ_j, $1 \leqslant j \leqslant r$, un șir de variabile aleatoare care iau fiecare valorile 1 sau 0, după cum extracția din urna considerată furnizează o bilă de culoare 1 sau 2. Pentru ca

$$\zeta_1 + \ldots + \zeta_n = s,$$

trebuie ca

$$\zeta_1 + \ldots + \zeta_{n-1} = s - 1$$

sau

$$\zeta_1 + \ldots + \zeta_{n-1} = s.$$

În primul caz numărul de bile de culoare 1 din urnă, după extracția de rang $n-1$, este

$$a - (s-1) + (n-s) = a + n - 2s + 1,$$

iar în al doilea caz,

$$a - s + n - s - 1 = a + n - 2s - 1.$$

În primul caz probabilitatea ca $\zeta_n = 1$ este

$$\frac{1}{2} + \frac{n - 2s + 1}{2a},$$

iar în al doilea caz probabilitatea ca $\zeta_n = 0$ este

$$\frac{1}{2} + \frac{n - 2s - 1}{2a}.$$

Să descompunem suma

$$\zeta_1 + \ldots + \zeta_n = s$$

în doi termeni, și anume în $\zeta_1 + \ldots + \zeta_{n-1}$ și ζ_n. Atunci

$$P_n(s) = \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{n}{2} - s + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{a}\right] P_{n-1}(s-1) +$$

$$+ \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{n}{2} - s - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{a}\right] P_{n-1}(s).$$

Cum $a = 2k$, rezultă, în definitiv, din ultima relație

$$P_{2n}(x) = \frac{2k+1}{4k}\left[P_{2n-1}\left(x+\frac{1}{2}\right) + P_{2n-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{x}{2k}\left[P_{2n-1}\left(x+\frac{1}{2}\right) - P_{2n-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right], \qquad (3)$$

$$P_{2n+1}\left(x-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1-x}{2k}\right) P_{2n}(x-1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2k}\right) P_{2n}(x).$$

Să introducem acum funcţia caracteristică corespunzătoare

$$f_{2n}(t) = \sum_{x=-k}^{k} e^{itx} P_{2n}(x),$$

$$f_{2n+1}(t) = \sum_{x=-k}^{k-1} e^{it\left(x+\frac{1}{2}\right)} P_{2n+1}\left(x+\frac{1}{2}\right) = \tag{4}$$

$$= \sum_{x=-k+1}^{k} e^{it\left(x-\frac{1}{2}\right)} P_{2n+1}\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

Derivînd egalităţile (4) în raport cu t, obţinem

$$\sum_{x=-k}^{k} x e^{itx} P_{2n}(x) = -if'_{2n}(t),$$

$$\sum_{x=-k}^{k-1} x e^{i\left(x+\frac{1}{2}\right)t} P_{2n+1}\left(x+\frac{1}{2}\right) = -if'_{2n+1}(t) - \frac{1}{2} f_{2n+1}(t), \tag{5}$$

$$\sum_{x=-k+1}^{k} x e^{i\left(x-\frac{1}{2}\right)t} P_{2n+1}\left(x-\frac{1}{2}\right) = -if'_{2n+1}(t) + \frac{1}{2} f_{2n+1}(t);$$

din aceste egalităţi şi din (3) şi (4) rezultă

$$\sum_{x=-k}^{k} e^{itx} P_{2n}(x) = \frac{2k+1}{4k} \sum_{x=-k}^{k} e^{itx} P_{2n-1}\left(x+\frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \frac{2k+1}{4k} \sum_{x=-k}^{k} e^{itx} P_{2n-1}\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2k} \sum_{x=-k}^{k} x e^{itx} P_{2n-1}\left(x+\frac{1}{2}\right) -$$

$$- \frac{1}{2k} \sum_{x=-k}^{k} x e^{itx} P_{2n-1}\left(x-\frac{1}{2}\right) = \frac{2k+1}{4k} e^{-i\frac{t}{2}} \sum_{x=-k}^{k} e^{i\left(x+\frac{1}{2}\right)t} P_{2n-1}\left(x+\frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \frac{2k+1}{4k} e^{i\frac{t}{2}} \sum_{x=-k}^{k} e^{i\left(x-\frac{1}{2}\right)t} P_{2n-1}\left(x-\frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2k} e^{i\frac{t}{2}} \sum_{x=-k}^{k} x e^{i\left(x+\frac{1}{2}\right)t} P_{2n-1}\left(x+\frac{1}{2}\right) -$$

$$- \frac{1}{2k} e^{i\frac{t}{2}} \sum_{x=-k}^{k} x e^{i\left(x-\frac{1}{2}\right)t} P_{2n-1}\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

care se mai poate scrie

$$f_{2n}(t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{t}{2}} + e^{-i\frac{t}{2}}\right) f_{2n-1}(t) - \frac{t}{2k}\left(e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}\right) f'_{2n-1}(t)$$

şi deci

$$f_{2n}(t) = \cos\frac{t}{2} f_{2n-1}(t) - \frac{1}{k}\sin\frac{t}{2} f'_{2n-1}(t). \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog, vom obține

$$f_{2n+1}(t) = \cos\frac{t}{2} f_{2n}(t) - \frac{1}{k}\sin\frac{t}{2} f'_{2n}(t). \tag{7}$$

În general, vom avea pentru orice $n \in N^*$

$$f_n(t) = \cos\frac{t}{2} f_{n-1}(t) - \frac{1}{k}\sin\frac{t}{2} f'_{n-1}(t).$$

Deoarece

$$f_1(t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{t}{2}} + e^{-i\frac{t}{2}}\right) = \cos\frac{t}{2},$$

din relația (8) rezultă

$$f_2(t) = \frac{1}{2k} + \frac{2k-1}{2k}\cos^2\frac{t}{2},$$

$$f_3(t) = \frac{3k-1}{2k^2}\cos\frac{t}{2} + \frac{2k^2-3k+1}{2k^2}\cos^3\frac{t}{2}.$$

.....

Notînd

$$y = \cos\frac{t}{2},$$

din relațiile (6) și (7) obținem

$$\begin{aligned} f_{2n}(y) &= y f_{2n-1}(y) + \frac{1-y^2}{2k} f'_{2n-1}(y), \\ f_{2n+1}(y) &= y f_{2n}(y) + \frac{1-y^2}{2k} f'_{2n}(y). \end{aligned} \tag{8}$$

Ultima relație (8) dă prin derivare

$$f'_{2n+1}(y) = f_{2n}(y) + y\left(1 - \frac{1}{k}\right) f'_{2n}(y) + \frac{1-y^2}{2k} f''_{2n}(y)$$

și ținînd seama de prima relație (8), deducem

$$\begin{aligned} f_{2n}(y) = \left(y^2 + \frac{1-y^2}{2k}\right) f_{2n-2}(y) + \left(2 - \frac{1}{k}\right)\frac{y(1-y^2)}{2k} f'_{2n-2}(y) + \\ + \frac{(1-y^2)^2}{4k^2} f''_{2n-2}(y). \end{aligned} \tag{9}$$

În mod analog, obținem

$$\begin{aligned} f_{2n+1}(y) = \left(y^2 + \frac{1-y^2}{2k}\right) f_{2n-1}(y) + \left(2 - \frac{1}{k}\right)\frac{y(1-y^2)}{2k} f'_{2n-1}(y) + \\ + \frac{(1-y^2)^2}{4k^2} f''_{2n-2}(y). \end{aligned}$$

În general, putem scrie

$$f_{2n}(y) = \sum_{j=0}^{n} a_{jn} y^{2j}, \qquad f_{2n+1}(y) = \sum_{j=0}^{n} b_{jn} y^{2j+1}$$

și din (9) și (10) rezultă

$$a_{m+1,\,m+1} = \frac{(2m-2k)(2m-2k+1)}{4k^2} a_{m,\,m},$$

$$b_{m+1,\,m+1} = \frac{(2m-2k+1)(2m-2k+2)}{4k^2} b_{m,\,m}.$$

Urmează că

$$a_{k+1,m+1} = 0, \qquad b_{k,\,m+1} = 0$$

și deci, pentru $n > k$, funcțiile caracteristice $f_{2n}(y)$ și $f_{2n-1}(y)$ sînt polinoame de grad $2k$, respectiv $2k-1$.

Se poate demonstra că pentra $n \to \infty$ funcția $f_n(y)$ converge uniform către o funcție $f(y)$.

Într-adevăr, derivînd de r ori egalitatea (9) și făcînd pe $y = 1$, obținem

$$f_{2n}^{(r)}(1) = \left(1 - \frac{r}{k}\right)^2 f_{2n-2}^{(r)}(1) + \alpha_r f_{2n-2}^{(r-1)}(1) + \beta_r f_{2n-2}^{(r-2)}(1), \tag{11}$$

unde α_r și β_r sînt constante, iar $0 \leqslant r \leqslant 2k$, deoarece gradul lui $f_{2n}(y)$ este $2k$.

Succesiunea

$$f_{2n}(1),\ f'_{2n}(1),\ \ldots,\ f_{2n}^{(2k)}(1) \tag{12}$$

se obține din șirul

$$f_{2n-2}(1),\ f'_{2n-2}(1),\ \ldots,\ f_{2n-2}^{(2k)}(1)$$

cu ajutorul relației de recurență (11), care se poate scrie sub forma

$$X'_r = \left(1 - \frac{r}{k}\right)^2 X_r + \alpha_r X_{r-1} + \beta_r X_{r-2}, \quad 0 \leqslant r \leqslant 2k, \quad X_0 = 1.$$

Rădăcinile ecuației caracteristice corespunzătoare transformării liniare precedente sînt egale cu $\left(1 - \frac{r}{k}\right)^2$, $1 \leqslant r \leqslant 2k$, adică sînt mai mici decît 1 și deci rezultă că iteratele acestei transformări tind către limite finite și bine determinate. Fie atunci aceste limite

$$f(1),\ f'(1),\ \ldots,\ f^{(2k)}(1).$$

Pe de altă parte, putem scrie

$$f_{2n}(y) = f_{2n}(1) + (y-1) f'_{2n}(1) + \frac{(y-1)^2}{2!} f''_{2n}(1) + \ldots + \frac{(y-1)^{2k}}{(2k)!} f_{2n}^{(2k)}(1)$$

și considerînd polinomul

$$f(y) = f(1) + (y-1)f'(1) + \frac{(y-1)^2}{2!}f''(1) + \ldots + \frac{(y-1)^{2k}}{(2k)!}f^{(2k)}(1)$$

vom avea

$$f_{2n}(y) - f(y) = [f_{2n}(1) - f(1)] + (y-1)[f'_{2n}(1) - f'(1)] + \ldots + \frac{(y-1)^{2k}}{(2k)!}[f^{(2k)}(1) - f^{(2k)}(1)].$$

Cum

$$-1 \leqslant y \leqslant 1, \qquad f_{2n}(1) = f(1) = 1,$$

rezultă

$$|f_{2n}(y) - f(y)| \leqslant 2|f'_{2n}(1) - f(1)| + \ldots + \frac{2^{2k}}{(2k)!}|f^{(2k)}_{2n}(1) - f^{(2k)}(1)|.$$

Fiind dat $\varepsilon > 0$ arbitrar de mic, există un n_ε astfel încît pentru $n > n_\varepsilon$ să avem

$$|f'_{2n}(1) - f'(1)| < \varepsilon, \ |f''_{2n}(1) - f''(1)| < \varepsilon, \ldots, |f^{(2k)}_{2n}(1) - f^{(2k)}(1)| < \varepsilon,$$

de unde rezultă

$$|f_{2n}(y) - f(y)| < \varepsilon\left(1 + \frac{2}{2!} + \ldots + \frac{2^{2k}}{(2k)!}\right), \qquad n > n_\varepsilon,$$

oricare ar fi $y \in [-1, 1]$. Putem afirma deci că în acest interval $f_{2n}(y)$ converge uniform către $f(y)$. Pe de altă parte, relația (9) ne arată că această limită verifică ecuația diferențială

$$(1 - y^2)\,Y'' + 2(2k-1)\,Y' - 2k(2k-1)\,Y = 0. \tag{13}$$

Aceeași metodă este aplicabilă șirului de funcții $(f_{2n+1}(y))_{n \in N^*}$, care tinde uniform către un polinom, verificînd de asemenea ecuația (13).

Prin simple identificări se arată că aceste polinoame sînt următoarele:

$$\frac{1}{2^{k-1}}(y^{2k} + C^2_{2k}y^{2k-2} + \ldots + C^{2k}_{2k}),$$

$$\frac{1}{2^{2k-1}}(C^1_{2k}y^{2k-1} + C^3_{2k}y^{2k-3} + \ldots + C^{2k-1}_{2k}y).$$

Prin urmare, funcțiile caracteristice $f_{2n}(t)$ și $f_{2n+1}(t)$ converg uniform pentru $n \to \infty$, către următoarele funcții limită:

$$F(t) = \frac{1}{2^{a-1}}\left[\left(\cos\frac{t}{2}\right)^a + C^2_a\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{a-2} + \ldots + C^a_a\right],$$

$$G(t) = \frac{1}{2^{a-1}}\left[C^1_a\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{a-1} + C^3_a\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{a-3} + \ldots + C^{a-1}_a\cos\frac{t}{2}\right],$$

unde $a = 2k$.

Probabilitatea limită corespunzătoare se deduce fără dificultate. Într-adevăr, fie $P(x)$ această limită și

$$F(t) = \sum_{x=-k}^{k} P(x)\, e^{itx},$$

$$G(t) = \sum_{x=-k}^{k-1} P\left(x + \frac{1}{2}\right) e^{i\left(x+\frac{1}{2}\right)t}.$$

Cum

$$P(x) = P(-x),$$

rezultă

$$F(t) = 2P(k)\cos kt + 2P(k-1)\cos(k-1)\,t + \ldots + P(0),$$

$$G(t) = 2P\left(k-\frac{1}{2}\right)\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)t + \ldots + 2P\left(\frac{1}{2}\right)\cos\frac{t}{2}$$

și deci funcțiile $F(t)$ și $G(t)$ trebuie să verifice ecuația diferențială

$$2\sin\frac{t}{2}\theta'' + (1-4k)\cos\frac{t}{2}\theta' + (1-2k)\,k\sin\frac{t}{2}\theta = 0 \qquad (14)$$

de unde, prin identificare, rezultă

$$P(k-\nu) = \frac{(4k-2\nu+2)(4k-2\nu+1)}{2\nu(2\nu-1)}\,P(k-\nu-1),$$

$$P\left(k-\nu-\frac{1}{2}\right) = \frac{(4k-2\nu+3)(4k-2\nu+2)}{(2\nu-1)(2\nu-2)}\,P\left(k-\nu-\frac{3}{2}\right)$$

sau încă

$$P(k-\nu) = C_{4k}^{2\nu}\,P(k),$$

$$P\left(k-\nu-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4k}\,C_{4k}^{2\nu-1}\,P\left(k-\frac{1}{2}\right).$$

Pe de altă parte,

$$\sum_{\nu=-k}^{k} P(\nu) = 1, \qquad \sum_{\nu=-k}^{k} P\left(\nu-\frac{1}{2}\right) = 1$$

și relațiile precedente ne dau

$$P(k)\,(C_{4k}^{0} + C_{4k}^{2} + \ldots + C_{4k}^{4k}) = 1,$$

$$\frac{1}{4k}\left(k-\frac{1}{2}\right)(C_{4k}^{1} + C_{4k}^{3} + \ldots + C_{4k}^{4k-1}) = 1$$

sau încă

$$P(k) = \frac{1}{2^{4k-1}}, \qquad P\left(k-\frac{1}{2}\right) = \frac{4k}{2^{4k-1}}$$

și deci

$$P(k-\nu)=\frac{1}{2^{4k-1}}C_{4k}^{2\nu},$$

$$P\left(k-\nu-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{4k-1}}C_{4k}^{2\nu-1}.$$

În cele din urmă, obținem legile limită

$$P(x)=\frac{1}{2^{2a-1}}C_{2a}^{a-2x},$$

$$P\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{2a-1}}C_{2a}^{a-2x-1}.$$

Observație. Pentru valori mari ale lui a, aplicînd formula lui Stirling, obținem

$$P(x)=\frac{2}{\sqrt{a\pi}}e^{-\frac{4x^2}{a}}$$

adică legea lui Gauss. Pentru valori mici ale lui a, legea limită este în mod esențial distinctă de aceea a lui Gauss.

7. Teoreme limită

Problema determinării legii limită pentru sumele de variabile ale unui lanț cu legături complete a fost tratată mai întîi de O. Onicescu și G. Mihoc, pentru cazul alternativ.

Fie $(\xi_i)_{i\in N^*}$ un lanț cu legături complete staționar și să notăm cu $P^{(n)}(p;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1})$ probabilitatea ca

$$\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n=\alpha_1\omega_1+\ldots+\alpha_m\omega_m+\alpha_{m+1}\omega_{m+1},$$

unde $\alpha_j\in N$, $1\leqslant j\leqslant m+1$, și $\sum_{j=1}^{m+1}\alpha_j=n$ și cu $f^{(n)}(p;\ t,\ \theta)$ funcția caracteristică corespunzătoare sumei

$$\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n-n\theta.$$

Avem

$$P^{(n)}(p;\ \alpha_1,\ldots,\alpha_{m+1})=$$
$$=\sum_{j=1}^{m+1}p_jP^{(n-1)}(\varphi_j(p);\ \alpha_1,\ldots,\alpha_{j-1},\ \alpha_j-1,\ \alpha_{j+1},\ldots,\alpha_{m+1}). \qquad (1)$$

Prin definiție însă, funcția caracteristică, ținînd seama de (1), este dată de

$$f^{(n)}(p;\ t,\ \theta)=\sum_{j=1}^{m+1}p_j\,e^{(\omega_j-\theta)it}\,f^{(n-1)}(\varphi_j(p);\ t,\ 0).$$

Legi limită au fost date de O. Onicescu și G. Mihoc examinînd ecuația funcțională

$$f(p;\ t,\ \theta) = \lambda(t) \sum_{j=1}^{m+1} p_j\, e^{(\omega_j - \theta)it} f(\varphi_j(p);\ t,\ \theta),$$

unde funcțiile $\varphi_{jk}(p)$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, $1 \leqslant k \leqslant m$, sînt olomorfe pentru $|p_j| < 1 + r\,(r > 0)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, și verifică condiția

$$|\varphi_{jk}(p)| \leqslant a + 1.$$

Vom stabili cîteva teoreme limită utilizînd teoria operatorilor relativ complet continui.

Să observăm că funcțiile caracteristice se obțin unele din altele prin aplicarea operatorului

$$Vf(p;\ t,\ \theta) = \sum_{j=1}^{m+1} p_j e^{(\omega_j - \theta)it} f(\varphi_j(p);\ t,\ \theta),$$

unde t și θ sînt parametri reali.

În particular

$$f^{(1)}(p;\ t,\ \theta) = \sum_{j=1}^{m+1} p_j e^{(\omega_j - \theta)it}.$$

Să notăm cu W spațiul euclidian cu m dimensiuni, cu $C(W)$ spațiul funcțiilor continue complexe definite W, cu norma obișnuită

$$\|\varphi\| = \sup_{c \in W} |\varphi(c)|, \quad \varphi \in C(W)$$

Fie acum $CL(W)$ spațiul funcțiilor complexe definite pe W, pentru care

$$\frac{|\varphi(c') - \varphi(c'')|}{\rho(c', c'')} < k$$

cu $c', c'' \in W$ și $c' \neq c''$.

În aceste condiții putem stabili următoarele teoreme.

Teorema 1. *Funcțiile caracteristice* $f^{(n)}(p;\ t,\ \theta) \in CL(W)$ *oricare ar fi* $n \in N^*$ *și* $p \in \Delta$ *dacă*

(a) *aplicația* $\varphi : \Delta \to \Delta$ *este mărginită în raport cu distanța euclidiană* $\rho(p', p'')$, $p', p'' \in \Delta$, *adică*

$$\rho(\varphi(p'), \varphi(p'')) \leqslant \|\varphi\| \rho(p', p'');$$

(b) *există o valoare* k_0 *a lui* k, $1 \leqslant k \leqslant m+1$, *pentru care* $\varphi_{jk_0} \geqslant 0$, *pentru orice* j, $1 \leqslant j \leqslant m$;

(c) *aplicațiile* $\varphi_j (1 \leqslant j \leqslant m+1)$ *sînt mărginite și*

$$\|\varphi_j\| < 1 \text{ dacă } j = k_0 \text{ și } \|\varphi_j\| \leqslant 1 \text{ dacă } j \neq k_0$$

Demonstrație. Într-adevăr

$$|f^{(1)}(p';t,\theta)-f^{(1)}(p'';t,\theta)|=\left|\sum_{j=1}^{m+1}(p_j'-p_j'')\,e^{(\omega_j-\theta)it}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\sum_{j=1}^{m+1}|p_j'-p_j''|\right|.$$

Cum însă

$$\rho(p',p'')=\sqrt{\sum_{j=1}^{m+1}(p_j'-p_j'')^2}$$

rezultă

$$\frac{f^{(1)}(p';t,\theta)-f^{(1)}(p'';t,\theta)}{\rho(p'\cdot p'')}=\frac{\sum_{j=1}^{m+1}|p_j'-p_j''|}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m+1}(p_j'-p_j'')^2}}<m+1<\infty.$$

Atunci avem

$$f^{(n+1)}(p';t,\theta)-f^{(n+1)}(p;t,\theta)\leqslant\sum_{j=1}^{m+1}(p_j'-p_j'')\,e^{(\omega_j-\theta)it}\,f^{(n)}(\varphi_j(p');t,\theta)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m+1}p_j''e^{(\omega_j-\theta)it}\,(f^{(n)}(\varphi_j(p');t,\theta)-f^{(n)}(\varphi_j(p'');t,\theta).\qquad(2)$$

Cum însă se poate găsi un h independent de n, p' și p'' astfel încît

$$\left|\sum_{j=1}^{m+1}(p_j'-p_j'')\,e^{it(\omega_j-\theta)}\,f^{(n)}(\varphi(p');t,\theta)\right|\leqslant h\rho(p',p'')$$

să presupunem că pentru orice p' și $p''\in\Delta_a\subset\Delta$, unde Δ_a este definit de relația $a\leqslant p_{k_0}$, avem

$$|f^{(n)}(p';t,\theta)-f^{(n)}(p'',t,\theta)|\leqslant M\rho(p',p''),n>1.$$

Să arătăm că această inegalitate rămîne valabilă cînd se înlocuiește n cu $n+1$. Într-adevăr, din relația (2) rezultă

$|f^{(n)}(\varphi_j p');t,\theta)-f^{(n)}(\varphi_j(p'';t,\theta)|\leqslant M\rho(\varphi_j(p'),\varphi_j(p''))\leqslant M\|\varphi_j\|\rho(p',p'')$, ceea ce implică

$$\left|\sum_{j=1}^{m+1}p_j''e^{it(\omega_j-\theta)}\,f^{(n)}[\varphi_j(p');t,\theta)-f^{(n)}(\varphi_j(p'');t,\theta)]\right|\leqslant M\rho(p',p'')\sum_{j=1}^{m+1}p_j''\|\varphi_j\|.$$

Cum $\|\varphi_j\|<1$ urmează că

$$\sum_{j=1}^{m+1}p_j''\|\varphi_j\|\leqslant 1-p_{k_0}''+p_{k_0}''\|\varphi_{k_0}\|$$

și deci

$$\left| \sum_{j=1}^{m+1} p_j^{*} e^{il(\omega_j - \theta)} [f^{(n)}(\varphi_j(p'); t, \theta) - f^{(n)}(\varphi_j(p''); t, \theta)] \right| \leqslant$$

$$\leqslant M\rho(p', p'')[p_{k_0}^{*} \| \varphi_{k_0} \| + (1 - p_{k_0}^{*})].$$

Atunci avem

$$| f^{(n+1)}(p'; t, \theta) - f^{(n+1)}(p''; t, \theta) | \leqslant \rho(p', p'')[h + M(p_{k_0}^{*} \| \varphi_{k_0}^{*} \| +$$

$$+ (1 - p_{k_0}^{*})] \leqslant M\rho(p', p'')[1 - p_{k_0}^{*} + a - (a - p_{k_0}^{*}) \| \varphi_{k_0} \|] =$$

$$= M\rho(p', p'')[1 - (1 - \| \varphi_{k_0} \|)(p_{k_0}^{*} - a)] \leqslant M\rho(p', p''),$$

dacă

$$h \leqslant aM(1 - \| \varphi_{k_0} \|).$$

Însă

$$1 - \| \varphi_{k_0} \| > 0, \quad p_{k_0}^{*} - a > 0.$$

Dacă acum

$$M \geqslant m + 1, \quad M \geqslant \frac{h}{a(1 - \| \varphi_{k_0} \|)},$$

rezultă că pentru orice $n > 1$ avem

$$| f^{(n+1)}(p'; t, \theta) - f^{(n+1)}(p''; t, \theta) | \leqslant M\rho(p', p''),$$

ceea ce implică demonstrația teoremei.

Vom reaminti acum o teoremă privind operatorii relativ complet continui.

Fie E un spațiu vectorial complex și B un subspațiu al lui E. Să presupunem că E este un spațiu Banach în raport cu o normă $x \to |x|$ și B un spațiu Banach în raport cu o normă $x \to \| x \|$ definită pe B. Presupunem încă verificată condiția

$$x_n \in B, \ \| x \| \leqslant N \text{ (constant)}, \ n = 1, 2, \ldots \text{ și}$$

$$\lim_{n \to \infty} | x_n - x | = 0, \text{ implică } x \in B \text{ și } \| x \| \leqslant N.$$

Fie $C(B,E)$ mulțimea operatorilor T ai spațiului Banach B care satisfac condițiile:

(i) există o consantă pozitivă H, astfel încît pentru $n = 1, 2$, avem

$$| T^n |_B \leqslant H;$$

(ii) există două constante R, r $(0 < r < 1)$, astfel încît

$$\| Tx \| \leqslant r \| x \| + R | x |,$$

oricare ar fi $x \in B$;

(iii) pentru orice parte $P \subset B$, mărginită în B, $T(B)$ este relativ compactă în E.

În mod esențial vom folosi următoarea teoremă.

Teorema T. *Fie T un operator aparținînd mulțimii $C(B, E)$. Atunci nu există decît un număr finit de valori proprii de modul 1, ale operatorului T, $c_1, c_2, \ldots, c_p$*

$$T^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i^n} T_i + S_n, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

unde $T_i (i = 1, 2, \ldots p)$ sînt operatori avînd ca domeniu spațiul B și ca contradomeniu o parte liniară a lui B, de dimensiune finită, liniară și mărginită, și S_n un operator avînd ca domeniu spațiul B și contradomeniul conținut în B, liniar și mărginit;

$$T_i^2 = T_i, \; T_i T_j = 0, \quad (i \neq j), \quad T_i S = S T_i = 0$$

$$\| S^n \| \leqslant \frac{M}{(1+h)^n}, \quad (n = 1, 2 \ldots),$$

M și h fiind două constante pozitive.

Să arătăm acum că funcțiile caracteristice corespunzătoare unui lanț cu legături complete, cu un număr finit de stări și staționar aparțin clasei de operatori $C(B, E)$. Mai precis, să demonstrăm următoarea teoremă:

Teorema 2. *Dacă identificăm spațiul E cu spațiul $C(W)$ și spațiul B cu $CL(W)$ și punem*

$$m(\varphi) = \sup_{\substack{p', p'' \in \Delta \\ p' \neq p''}} \frac{|\varphi(p') - \varphi(p'')|}{\rho(p', p'')}, \quad \varphi \in CL(W)$$

și alegem drept normă în $B = CL(W)$

$$\| \varphi \|_1 = m(\varphi) + \| \varphi \|,$$

unde $\| \varphi \|$ este norma lui φ în spațiul $E = C(W)$,

$$\| \varphi(p) \| = \sup_{p \in \Delta} |\varphi(p)|$$

atunci condițiile (i), (ii) *și* (iii) *sînt îndeplinite.*

Demonstrație. Să arătăm mai întîi că

$$CL(W) \subset C(W).$$

Într-adevăr, pentru $c \in W$ fix, arbitrar, avem

$$\sup_{\substack{c \in W \\ c \neq c_0}} \frac{|\varphi(c) - \varphi(c_0)|}{\rho(c, c_0)} = a < \infty,$$

ceea ce implică

$$|\varphi(c) - \varphi(c_0)| \leqslant a \cdot \rho(c, c_0),$$

adică tocmai continuitatea funcției φ în orice punct al lui W. În plus,

$$\sup_{c\in W} |\varphi(c)| < \infty,$$

de unde rezultă incluziunea cerută.

Să arătăm acum că spațiul $CL(W)$ poate fi organizat ca spațiu Banach, în raport cu norma

$$\|\varphi\|_1 = m(\varphi) + \|\varphi\|$$

Să verificăm mai întîi axiomele normei. Avem

I. $\|\varphi\|_1 = 0$ dacă și numai dacă $\varphi \equiv 0$;

prima implicație este evidentă, a doua rezultă din definiția normei. Să arătăm că

II. $$\|\varphi_1 + \varphi_2\|_1 \leqslant \|\varphi_1\|_1 + \|\varphi_2\|_1.$$

Pentru aceasta este suficient să demonstrăm convexitatea funcției $m(\varphi)$. care rezultă din următoarele inegalități:

$$m(\varphi_1 + \varphi_2) = \sup_{\substack{c',c''\in W\\ c'\neq c''}} \frac{|\varphi_1(c') + \varphi_2(c') - \varphi_1(c'') - \varphi_2(c'')|}{\rho(c', c'')} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{c',c''\in W\\ c'\neq c''}} \frac{|\varphi_1(c') - \varphi_1(c'')|}{\varphi(c', c'')} + \sup_{\substack{c',c''\in W\\ c'\neq c''}} \frac{|\varphi_2(c') - \varphi_2(c'')|}{\rho(c', c'')} =$$

$$= m(\varphi_1) + m(\varphi_2).$$

Pentru a arăta că

III. $$\|\lambda\varphi\|_1 = |\lambda| \cdot \|\varphi\|_1$$

este suficient să demonstrăm că

$$m(\lambda\varphi) = |\lambda| m(\varphi).$$

Într-adevăr avem

$$\sup_{\substack{c',c''\in W\\ c'\neq c''}} \frac{|\lambda\varphi(c') - \lambda\varphi(c'')|}{\varphi(c', c'')} = |\lambda| \sup_{\substack{c',c''\in W\\ c'\neq c''}} \frac{|\varphi(c') - \varphi(c'')|}{\rho(c', c'')},$$

În sfîrșit, mai este nevoie să demonstrăm completitudinea spațiului $CL(W)$. Este suficient să arătăm

$$\lim_{n,p\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_p\|_1 = 0$$

implică existența unei funcții $\varphi\in CL(W)$ pentru care

$$\lim_{n\to\infty} m(\varphi_n = \varphi) = 0.$$

Vom demonstra mai întîi că dacă $(\varphi_n)_{n\in N^*}$ este un șir de elemente din $CL(W)$ convergent în sens obișnuit către o funcție φ, atunci

$$m(\varphi) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} m(\varphi_n).$$

Fie deci

$$\overline{m} = \varliminf_{n\to\infty} m(\varphi_n);$$

există un subșir $(\varphi_{n_j})_{j\in N^*}$ pentru care

$$\overline{m} = \lim_{j\to\infty} m(\varphi_{n_j}).$$

Fie acum $\varepsilon > 0$; există un întreg p astfel încît

$$m(\varphi_{n_j}) \leqslant \overline{m} + \varepsilon, \quad j > j_\varepsilon;$$

dacă $c', c'' \in W$, $c' \neq c''$, atunci

$$\frac{|\varphi(c') - \varphi(c'')|}{\rho(c', c'')} = \lim_{j\to\infty} \frac{|\varphi_{n_j}(c') - \varphi_{n_j}(c'')|}{\rho(c', c'')},$$

de unde rezultă

$$\frac{|\varphi(c') - \varphi(c'')|}{\rho(c', c'')} \leqslant \overline{m} + \varepsilon$$

și, cum ε este arbitrar, afirmația făcută este demonstrată.

Să presupunem acum că

$$\lim_{n,p\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_p\|_1 = 0;$$

de aici rezultă

$$\lim_{n,p\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_p\| = 0; \ (*)$$

și

$$\lim_{n,p\to\infty} m(\varphi_n - \varphi) = 0.$$

Relația (*) implică existența unei funcții $\varphi \in C(W)$ astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0.$$

Rămîne să arătăm că $\varphi \in CL(W)$ și

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_1 = 0.$$

Fie $\varepsilon > 0$ și n_ε un întreg astfel încît

$$m(\varphi_q - \varphi_n) < \varepsilon, \quad n, q > n_\varepsilon.$$

Dacă fixăm pe q, atunci

$$\varphi_q - \varphi_n \to \varphi_q - \varphi, \qquad n \to \infty$$

și deci, din cele demonstrate mai sus,

$$m(\varphi_q - \varphi_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} m(\varphi q - \varphi).$$

Rezultă atunci că

$$\varphi_q - \varphi \in CL(W),$$

ceea ce implică $\varphi \in CL(W)$. Mai mult, $q > n_\varepsilon$ fiind arbitrar, avem

$$\lim_{n\to\infty} m(\varphi_q - \varphi) = 0$$

și deci completitudinea lui $CL(W)$ este demonstrată.

Teorema 3. *Fie* $(\xi_i)_{i\in N^*}$ *un lanț cu legături complete staționar, putînd lua valorile* $(i = 1, 2, \ldots m+1)$, *definit prin operatorul*

$$UF(p) = \sum_{j=1}^{m+1} p_j F(\varphi_j(p)).$$

Dacă

(a) *aplicația* $\varphi : \Delta \to \Delta$ *este mărginită în raport cu distanța euclidiană* $\rho(p', p'')$, $p', p'' \in \Delta$, *adică*

$$\rho(\varphi(p'), \varphi(p'')) \leqslant \|\varphi\| \rho(p', p''),$$

(b) *există o valoare* k_0 *a lui* k, $1 \leqslant k \leqslant m+1$, *pentru care*

$$\varphi_{jk0} > 0, \text{ pentru orice } j,\ 1 \leqslant j \leqslant m,$$

(c) *aplicațiile* φ_j, $(1 \leqslant j \leqslant m+1)$ *sînt mărginite și*

$$\|\varphi_j\| < 1, \text{ dacă } j = k_0$$
$$\|\varphi_j\| \leqslant 1, \text{ dacă } j \neq k_0,$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} D^2\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = a,$$

unde a *este constantă finită și diferită de zero, atunci variabila* $\sum_{i=1}^{n} \xi_i$ *normată în mod convenabil, este asimptotic gaussiană.*

Demonstrație. Din teoremele 1, 2 și T rezultă că putem scrie

$$f^{(n)}(p; t, \theta) = \sum_{i=1}^{p} \mu_i^n(t; \theta) f_i^{(1)}(p; t, \theta) + g_n(p; t, \theta),$$

unde

$$|\mu_i(t;\theta)| = 1,$$

ar $f_i^{(1)}(p;t,\theta)$ sînt funcții date și

$$\lim_{n\to\infty} g_n(p;t,\theta) = 0.$$

Pentru $t = 0$, trebuie să avem (deoarece f este funcție caracteristică)

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i^n(0;\theta) f_i^{(1)}(p;0,\theta) + g_n(p;0,\theta) = 1, \tag{3}$$

oricare ar fi $n \in N^*$.

De asemenea, există o valoare proprie $\lambda_1(t,\theta)$ pentru care $\mu_1(0,\theta) = 1$. Se constată ușor că relația (3) nu este posibilă decît dacă

$$f_i^{(1)}(p;0,\theta) = 1, \text{ pentru } i = 1;$$

$$f_i^{(1)}(p;0,\theta) = 0, \text{ pentru } i \neq 1;$$

$$g_n(p;0,\theta) = 0, \text{ pentru orice } n \in N^*.$$

Rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}\left(p;\frac{t}{\sqrt{n}},\theta\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda_i^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}},\theta\right).$$

Funcțiile caracteristice $f^{(n)}(p;t,\theta)$ sînt de forma

$$f^{(n)}(p;t,\theta) = \sum_{j_1,j_2,\ldots j_n} A_{j_1 j_2 \cdots j_n}(p)\, e^{(\omega j_1 + \ldots + \omega j_n - n\vartheta)ti}$$

Deci ele sînt continue și admit derivate de orice ordin finit în raport cu t. Din (3) rezultă atunci că aceeași proprietate o are și funcția $\mu_1(t,\theta)$ cu excepția unei mulțimi de măsură nulă.

Să alegem acum pe $\theta = \theta_0$ astfel încît

$$\left(\frac{d\mu_1(t,\theta_0)}{dt}\right)_{t=0} = 0.$$

Aceasta revine la anularea momentului de ordinul întîi, ceea ce este întotdeauna posibil.

Avem în plus, din condiția (d) a teoremei enunțate

$$\left(\frac{d^2\mu_1(t,\theta_0)}{dt^2}\right)_{t=0} \neq 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă atunci din (3)

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}\left(p; \frac{t}{\sqrt{n}}, \theta_0\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_1^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}, \theta_0\right) = e^{-\frac{\lambda_1''(0,\theta_0)t^2}{2}}$$

unde $\lambda_1(t, \theta) = \mu_1^{-1}(t, \theta)$.

Ceea ce demonstrează teorema enunțată.

Condițiile teoremelor 1 și 3 pot fi înlocuite cu altele, mai precis cu cele date de O. Onicescu și G. Mihoc pentru demonstrarea unor teoreme ergodice.

Teorema 4. *Funcțiile caracteristice* $f^{(n)}(p; t, \theta) \in CL(W)$ *oricare ar fi* $n \in N^*$ *și* $p \in \Delta$, *dacă*

a) funcțiile fundamentale $\varphi_{ij}(p)$, $1 \leqslant i \leqslant m+1$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, *sînt definite și continue în domeniul* Δ *și verifică condițiile*

$$0 \leqslant \varphi_{ij}(p) < 1,$$

b) *funcțiile fundamentale* $\varphi_{ij}(p)$, $1 \leqslant i \leqslant m+1$, $1 \leqslant j \leqslant m$ *admit derivate parțiale de ordinul întîi continue, verificînd condiția*

$$\sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\partial \varphi_{ij}(p)}{\partial p_k} \right| < 1$$

pentru orice k, $1 \leqslant k \leqslant m$.

Demonstrație. Derivînd în raport cu p_k avem

$$\frac{\partial f^{(n+1)}}{\partial p_k} = f^{(n)}(\varphi_k(p); t, \theta) - f^{(n)}(\varphi_{m+1}(p); t, \theta)]\, e^{(\omega_j - \theta)it} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m+1} p_j \left(\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f^{(n)}}{\partial \varphi_{j,l}} \cdot \frac{\partial \varphi_{j,l}}{\partial p_k} \right) e^{(\omega_j - \theta)it}.$$

Cum

$$\left| \frac{\partial \varphi_{j,l}}{\partial p_k} \right| < 1 < \lambda, \quad \lambda = \frac{1}{1-A},$$

avem

$$\sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\partial \varphi_{j,l}}{\partial p_k} \right| < A < 1.$$

Dacă presupunem că

$$\left| \frac{\partial f^{(n)}}{\partial p_k} \right| \leqslant \lambda$$

rezultă că

$$\left| \frac{\partial f^{(n+1)}}{\partial p_k} \right| \leqslant 1 + \lambda A = \lambda$$

și deci

$$|f^{(n)}(p'; t, \theta) - f^{(n)}(p''; t, \theta)| \leqslant \sum_{j=1}^{m} |p' - p''| \left| \frac{\partial f^{(n)}}{\partial p_j} \right|_{p=r}$$

unde r este situat în intervalul m — dimensional generat de p' și p''.

De aici rezultă afirmația teoremei, deoarece

$$|f^{(n)}(p'; t, \theta) - f^{(n)}(p'', t, \theta)| \leqslant \lambda \rho(p' \cdot p'').$$

Întrutotul analog se stabilește teorema 2 și deci se poate stabili următorul rezultat

Teorema 5. *Fie* $(\xi_i)_{i \in N^*}$ *un lanț cu legături complete staționar, putînd lua un număr finit de valori, definit prin operatorul*

$$\cup F(p) = \sum_{j=1}^{m+1} p_j F(\varphi_j(p)).$$

Dacă

(a) *funcțiile fundamentale* $\varphi_{ij}(p)$, $1 \leqslant i \leqslant m+1$, $i \leqslant j \leqslant m+1$, *sînt definite și continue în domeniul* Δ *și verifică condițiile*

$$0 < \varphi_{ij}(p) < 1,$$

(b) *funcțiile fundamentale* $\varphi_{ij}(p)$, $1 \leqslant i \leqslant m+1$, $1 \leqslant j \leqslant m$ admite *derivate parțiale de ordinul întîi continue, verificînd condiția*

$$\sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\partial \varphi_{ij}(p)}{\partial p_k} \right| < 1$$

pentru orice k, $1 \leqslant k \leqslant m$,

(c)
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} D^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \right) = a,$$

unde a *este o constantă finită și diferită de zero, atunci variabila* $\sum_{i=1}^{n} \xi_i$, *normată în mod convenabil, este asimptotic gaussiană.*

Demonstrația este întrutotul analogă cu cea din teorema 3.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VI

ELEMENTE DE TEORIA AȘTEPTĂRII

§ 1. Generalități

1. Introducere

Unul dintre noile domenii ale matematicii, strîns legat de industrie și economie, este așa-numita cercetare operativă, care are drept scop să pregătească mai multe soluții în vederea funcționării unui organism, punînd în joc oameni și mașini, în așa fel încît să se asigure un randament maxim. Compararea valorii diverselor soluții din punct de vedere economic constituie, de asemenea, un obiectiv important.

Pentru a se studia științific un organism oarecare este necesar să se folosească un model matematic, care trebuie ales cu multă grijă, în urma unei analize minuțioase și multilaterale, și care să caracterizeze esența organismului studiat. Evident că o problemă importantă, și nu ușoară, o constituie alegerea diverșilor parametri ai modelului, desemnarea parametrilor fundamentali în așa fel încît modelul matematic să reprezinte cît mai real fenomenul studiat. Pentru aceasta este necesar să se țină seama de datele furnizate de trecut și în același timp să se analizeze noile date obținute prin experimentare și de aici să se treacă la alegerea modelului matematic. Esențial în toate aceste probleme este calculul economic al soluției care se propune, în așa fel încît să se obțină un optimum.

Capitole importante ale cercetării operative sînt constituite de: programarea liniară și dinamică, teoria jocurilor, teoria informațiilor, metoda Monte Carlo, teoria așteptării etc. Toate aceste domenii nu pot fi abordate cu succes decît utilizînd metodele probabilistice și statistice.

Teoria așteptării constituie un capitol important al cercetării operative. Primele lucrări sînt cele ale lui Erlang (1908)lucrări efectuate pentru compania de telefoane din Copenhaga. Apoi, dintre lucrările cele mai importante reamintim acelea ale lui Kolmogorov (Sur le problème d'attente), Hincin (Model cu veniri poisson și timp de așteptare oarecare), Molina, Fry, Crommelin și alții. Teoriile riguroase ale acestui nou domeniu sînt recente. Subliniem faptul că pînă în prezent nu există o axiomatizare specifică a acestei teorii și nici un ansamblu de teoreme care să fie identificate ca constituind

„teoria". Sînt studiate diverse modele care sînt întîlnite în diverse probleme puse de practică și se dau soluții corespunzătoare.

Să vedem în ce constă teoria așteptării. Este foarte simplu de arătat, deoarece fiecare dintre noi a fost pus și este pus aproape în fiecare zi în fața unui fenomen de așteptare. Să menționăm așteptarea la încrucișările străzilor, cînd traversarea se poate face numai atunci cînd semaforul indică culoarea verde, așteptarea autobuzelor sau tramvaielor, aglomerarea constatată într-un magazin sau clinică etc. Iată numai cîteva exemple care dau o imagine privind aceste probleme. În toate aceste probleme, după cum cu toții știm, sînt două interese în conflict: acela, să zicem, al unității — prin unitate înțelegînd un pieton, o mașină, un client, un pacient etc. — și acela al stației de serviciu — prin stație de serviciu înțelegînd mecanismul care satisface o cerere, de exemplu o mașină, un mecanism etc. —, conflict care are ca scop ca timpul pierdut să fie minim. Situația optimă spre care se tinde este aceea ca să se ajungă la același ritm (cadență) al cererilor de a se face un anumit serviciu și îndeplinirea acestuia. Spre exemplu, dacă într-un atelier există un număr x de mecanici care repară anumite mașini-unelte și se constată o aglomerare de mașini care trebuie să fie reparate, se pune problema efectivului de mecanici. În ce măsură? Aceasta este o problemă la care ne răspunde teoria așteptării. Exemple se pot da numeroase. Fiecare poate să găsească un mare număr de situații de aglomerare. Vom da numai cîteva exemple în care utilizarea teoriei așteptării a dus la soluții foarte bune. Astfel:

— la supravegherea mașinilor automate, de exemplu de țesut;
— la traficul feroviar, rutier sau marin;
— în telefonie;
— la înmagazinarea de materii prime sau mărfuri într-un depozit de o capacitate dată;
— în fenomene de aglomerare într-un aeroport;
— în radio-comunicații;
— în organizarea unei clinici, magazin etc.

Iată numai cîteva domenii în care se cunosc rezultatele aplicării teoriei așteptării, rezultate ce au determinat o îmbunătățire substanțială a situației.

Care sînt elementele necesare abordării unei probleme de așteptare sau aglomerare? Pentru a răspunde la aceasta să considerăm un exemplu, și anume controlul traficului la încrucișări stradale. După cum știm, procesul pe care îl considerăm este reglementat de un semafor. În perioada de lumină roșie, mijloacele de transport (mașini, autocamioane, tramvaie, motociclete etc.) se dispun într-unul sau mai multe șiruri de așteptare, eventual adăugîndu-se la acelea care nu au avut posibilitatea să treacă încă de încrucișarea respectivă. Cînd semaforul indică lumina verde, mașinile încep să se miște pentru a înainta. Evident, că nu toate mașinile pornesc în același timp, viteza merge crescînd, ajungînd la o anumită valoare maximă care depinde de caracteristicile străzii de exemplu de lățime etc. Problema principală care se pune este aceea de a determina durata optimă de semnalizare, astfel încît traficul să se facă în cele mai bune condiții. Să vedem ce model teoretic corespunde.

Scanned with OKEN Scanner

Este vorba de *venirea* mașinilor, pe care le considerăm, așa cum este natural, în număr finit; dispunerea acestora *în unul sau mai multe șiruri de așteptare*; în perioada de lumină verde mașinile înaintează într-unul sau mai multe rînduri; vom *spune că avem una sau mai multe stații de serviciu*. Timpul necesar trecerii unei mașini îl vom numi și *timp de serviciu*. Pentru a răspunde la problema pusă ne interesează deci să determinăm:

numărul de unități în ansamblul fenomenului;
numărul de unități în sistemul de așteptare, adică în așteptare și în curs de serviciu;
numărul de unități în șirul de așteptare;
numărul de unități în curs de serviciu;
numărul de stații neocupate;
numărul mediu de elemente care vin în unitatea de timp;
numărul mediu al timpului de serviciu;
timpul mediu de așteptare în sistem;
timpul mediu de așteptare în șir;
intensitatea traficului, care este dată de raportul dintre valoarea medie a timpului de serviciu și valoarea medie a venirilor pe unitate de timp.

Iată deci numai caracteristicile principale care caracterizează un model de așteptare.

2. Descrierea probabilistă a intervalelor de venire și serviciu

a. *Veniri.* Acestea sînt presupuse întotdeauna ca fiind întîmplătoare și independente. Cu alte cuvinte, probabilitatea ca să se verifice o venire a unei unități este independentă de timpul și numărul de unități deja ajunse la stația de serviciu sau de cele ce vor veni. Deci, probabilitatea ca în intervalul de timp $(t, t+\delta)$ să se producă o venire este dată de $\frac{1}{\lambda}$, unde λ este o constantă. Această constantă indică numărul mediu de veniri în unitatea de timp δ. În cele mai multe cazuri venirile urmează o lege Poisson.

Să arătăm că legea de probabilitate a numărului de evenimente ce se pot produce într-un interval de timp (a, b) este poissoniană.

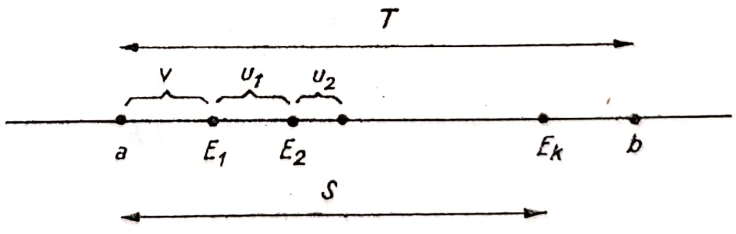

Fig. 11

Să notăm cu T durata intervalului (a, b), cu P_k — probabilitatea ca să se producă exact k evenimente, iar cu Q_k — probabilitatea de a avea loc cel puțin k evenimente. Evident că

$$Q_k = P_k + P_{k+1} + \ldots + P_{k+n} + \ldots$$

Să calculăm acum probabilitatea Q_k. Dacă pornim de la zero, evenimentele vor fi E_1, E_2,..., așa cum rezultă din figura 11.

Atunci, ținînd seama de notațiile din figură (a căror interpretare este imediată și nu mai insistăm asupra ei), rezultă că

$$Q_k = P \text{ (ca să producă cel puțin } k \text{ evenimente în intervalul } (a, b)) = P \text{ (durata } (a, E_k) \leqslant (a, b).$$

Însă

$$\text{durata } (a, E_k) = v + u_1 + \ldots + u_{k-1} = S,$$

unde v este durata de supraviețuire a primului interval, care urmează aceeași lege ca și u. Avem deci o sumă s de k intervale independente, care urmează o lege γ_k și deci

$$f_k(s)\, ds = e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda\, ds$$

unde cu $f_k(s)$ am notat densitatea de repartiție a legii γ_k. Rezultă

$$Q_k = P(s \leqslant T) = \int_0^T f_k(s) = \int_0^T e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda\, ds = \int_0^{\lambda T} e^{-u} \frac{u^{k-1}}{(k-1)!}\, du\,.$$

Și deci

$$P_k = Q_k - Q_{k-1} = \int_0^{\lambda T} \left(e^{-u} \frac{u^{k-1}}{(k-1)!} - e^{-u} \frac{u^k}{k!} \right) du.$$

Integrînd prin părți avem

$$P_k = \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^k}{k!}.$$

Aceasta însă este o lege Poisson, unde k este un număr întreg pozitiv sau nul, cu parametrul T.

Evident, T este numărul mediu de evenimente ce se produc în perioada de timp T. Într-adevăr

$$M(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k = \lambda T \cdot e^{-\lambda T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^k}{k!} = \lambda T$$

În plus

$$M(k^2) = \lambda T + (\lambda T)^2,$$

iar varianta

$$\text{var } k = M(k^2) - M^2(k) = \lambda T.$$

De altfel, atunci cînd se examinează o problemă concretă cu ajutorul datelor experimentale putem stabili ce fel de lege de distribuție urmează venirea unităților. Intervalele dintre două veniri consecutive urmează o lege exponențială negativă, după cum se poate constata cu ușurință.

Să presupunem deci că venirile urmează o lege Poisson și să arătăm că distribuția intervalelor dintre două veniri consecutive urmează o lege exponențială negativă.

Fie T o unitate de timp și a media lungimii intervalelor dintre două veniri consecutive. Dacă λ este media venirilor în unitate de timp, rezultă că

$$\lambda = \frac{T}{a}.$$

De exemplu, dacă T este o oră și $\lambda = 6$ veniri pe oră, rezultă $a = \frac{T}{\lambda} = \frac{1}{6}$, adică 10 min.

Fie acum $p(t_a)$ probabilitatea ca să nu avem nici o venire la momentul t_a, urmată de o venire în intervalul t_a, $t_a + \delta_a$. Probabilitatea ca să avem o venire în intervalul t_a, $t_a + \delta_a$ este egală cu

$$\frac{T}{a}\delta_a.$$

Dacă luăm $T = 1$, avem

$$p(t_a) - p(t_a + \delta_a) = p(t_a)\frac{\delta_a}{a}.$$

Împărțind cu δ_a și făcînd $\delta_a \to 0$, avem

$$\frac{dp(t_a)}{dt_a} = -\frac{p(t_a)}{a}. \qquad (*)$$

Notînd acum

$$\frac{1}{a} = \lambda,$$

obținem

$$\frac{dp}{dt} = -\lambda p$$

sau

$$p = ke^{-\lambda t}.$$

Constanta k se determină imediat. Deoarece $p(0) = 1$, rezultă $k = 1$.

Deci

$$p(t_a) = e^{-\lambda t}.$$

Ținînd seama de egalitatea (*) obținem că densitatea de repartiție a lungimii intervalelor de venire este dată de

$$A(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

O caracteristică importantă o constituie natura venirilor, dacă acestea sînt infinite sau se produc într-o populație finită.

Scanned with OKEN Scanner

În concluzie, de cele mai multe ori vom presupune:

— venirile sînt finite (sau infinite) independente și întîmplătoare;

— venirile urmează legea Poisson, iar intervalele dintre două veniri consecutive — o lege exponențială negativă de parametru λ, care reprezintă intervalul mediu dintre veniri;

— $\frac{1}{\lambda}$ este numărul mediu de veniri pe unitate de timp.

b. *Timpi de serviciu.* Sînt variabile aleatoare independente care pot urma o lege oarecare: o lege exponențială negativă cu parametrul μ, o lege constantă, o lege χ etc. În general, vom nota cu μ timpul mediu de serviciu. Pentru fiecare model vom menționa distribuția timpului de serviciu.

c. *Factor de serviciu* (sau intensitate de trafic). Îl vom nota cu ρ și îl vom defini prin

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Acest raport indică, în medie, numărul de unități care vin în perioada unui singur timp de serviciu. De aici și denumirea de factor de serviciu sau intensitate de trafic.

Acest factor are o importanță fundamentală în teoria așteptării, deoarece o dată stabilită repartiția timpului de serviciu, toate caracteristicile modelului de așteptare studiat se vor exprima în funcție de acest parametru.

d. *Stații de serviciu.* Vom indica mecanismul care deservește cererea unei unități. În practică vom avea una sau mai multe mașini, unul sau mai mulți oameni etc.

Putem avea următoarele cazuri:

— o singură stație (sau canal);

— mai multe stații în paralel (cînd se alege la întîmplare stația);

— mai multe stații în serie (dispuse într-o ordine prestabilită prin care trebuie să treacă (prin toate o unitate).

e. *Disciplina așteptării.* Ne dă regula după care se dispun în așteptare unitățile și ordinea în care sînt servite. Cea mai simplă și în același timp cea mai naturală regulă este aceea a ordinii venirii sau, altfel spus, „primul venit, primul servit".

Evident că se pot stabili și alte reguli. Disciplina așteptării stabilește deci cum să se facă dispunerea în șirul de așteptare și, în același timp, cum vor fi servite unitățile.

În legătură cu servirea unităților, putem distinge cazurile:

— *serviciu individual,* în care o unitate este servită o singură dată și apoi părăsește definitiv sistemul. Stația, după ce a deservit ultima unitate, rămîne inactivă pînă la venirea unei noi unități;

— *serviciu în bloc* în care sînt servite toate unitățile ce așteaptă pînă la un anumit număr maxim dat. Cînd stația a terminat de deservit un bloc, îl deservește pe al doilea ș.a.m.d. Cînd nu mai sînt unități în așteptare, stația rămîne inactivă pînă la venirea unui nou bloc;

— *serviciu în masă* în care stația lucrează încontinuu, cu anumite intervale de timp date. În fiecare interval sînt servite toate unitățile care pînă la sfîrșitul intervalului precedent se găseau în așteptare sau care ajung în

acea perioadă de timp. Numărul de unități ce intră în stație nu poate depăși un număr dat.

Noi vom considera, în special, acele modele în care venirile urmează o lege Poisson, serviciile o lege oarecare, disciplina fiind, „primul venit, primul servit" și serviciul individual.

Schematic, un model are forma următoare (fig. 12)

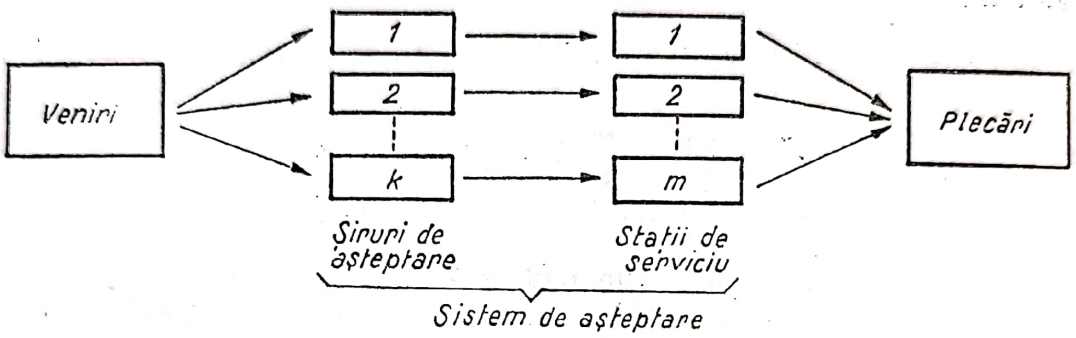

Fig. 12

O b s e r v a ț i e. Unitățile din șirul de așteptare pot avea în anumite modele o prioritate oarecare, pe care o vom prezenta atunci cînd vom examina modelele respective.

Să observăm că dacă notăm cu p_n probabilitatea ca să avem n unități în sistem, atunci valoarea medie a numărului de unități în sistem este dat de

$$T = \sum_{n=0}^{m} np_n,$$

unde m reprezintă numărul de unități în ansamblul fenomenului, iar valoarea medie a unităților în șirul de așteptare este dat de

$$Q = \sum_{n=N+1}^{m} (n - N)\, p_n,$$

unde N este numărul stațiilor de serviciu.

În cele ce urmează vom examina cîteva modele de așteptare.

§ 2. Model cu o singură stație

1. Descrierea modelului

Să presupunem că

— venirile sînt infinite, întîmplătoare și urmează o lege de distribuție dată de distribuția exponențială negativă cu parametrul λ;

— serviciile sînt independente și urmează de asemenea o lege exponențială negativă cu parametrul μ. O unitate după ce a fost servită părăsește total sistemul;

— avem o singură stație.

Pentru a analiza modelul propus, să considerăm sistemul la momentul inițial ($t = 0$). O să avem o primă venire la momentul $\delta > 0$. Să notăm cu $A(\delta)$ probabilitatea ca să avem o venire. Atunci

$$A(\delta) = \lambda \int_0^{\delta} e^{-\lambda x}\, dx = e^{-\lambda x} \Big|_0^{\delta} = 1 - e^{-\lambda \delta} \tag{1}$$

Dezvoltînd în serie pe $e^{-\lambda\delta}$ avem

$$A(\delta) = 1 - \left\{1 - (\lambda\delta) + \frac{(\lambda\delta)^2}{2!} - \ldots\right\} = \lambda\delta - \frac{\lambda^2\delta^2}{2!} + \ldots =$$

$$= \lambda\delta + \lambda\delta\left[-\frac{\lambda\delta}{2} + \ldots\right] = \lambda\delta + \delta h_1(\delta),$$

unde

$$\lim_{\delta \to 0} h_1(\delta) = 0.$$

Din egalitatea

$$A(\delta) = \lambda\delta + \delta h(\delta) \tag{2}$$

rezultă că o venire în sistem o putem considera proporțională cu δ. Să calculăm acum probabilitatea ca o venire să aibă loc în intervalul t și $t + \delta$. Avem

$$A(t, t+\delta) = \lambda \int_t^{t+\delta} e^{-\lambda x}\, dx = e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+\delta)} = e^{-\lambda t}\,[1 - e^{-\lambda\delta}],$$

sau, ținînd seama de (1), rezultă că

$$A(t, t+\delta) = e^{-\lambda t} A(\delta).$$

Însă tot din (1) rezultă că probabilitatea ca să nu avem nici o venire în intervalul de timp δ este $1 - A(\delta)$ și deci putem scrie

$$A(t, t+\delta) = e^{-\lambda t} A(\delta) = [1 - A(t)]\, A(\delta).$$

În mod analog se poate arăta că probabilitatea $B(\delta)$, ca o unitate să părăsească sistemul, este dată de

$$B(\delta) = \mu\delta + \delta h_2(\delta),$$

unde

$$\lim_{\delta \to 0} h_2(\delta) = 0.$$

Factorul de serviciu ρ este, prin definiție,

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Dacă $\rho \geqslant 1$, avem o aglomerare nelimitată, dacă $\rho < 1$, capacitatea sistemului este corespunzătoare, iar dacă $\rho \ll 1$ aproape lipsește aglomerarea (șirul de așteptare).

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem acum că la momentul t avem în sistem n unități și să notăm această probabilitate cu $P_n(t)$. Să vedem ce se poate întîmpla cu sistemul considerat la momentul $t + \delta$. Este posibil să avem n unități. Să notăm această probabilitate cu $P_n(t+\delta)$. În acest caz avem următoarele posibilități.

a) La momentul t să avem n unități în sistem, cu probabilitatea respectivă $P_n(t)$;

în intervalul δ nu se produce nici o venire, cu probabilitate $1 - A(\delta)$;

în intervalul δ nu se produce nici o plecare, cu probabilitatea $1 - B(\delta)$.

Cum aceste evenimente sînt independente, rezultă că în acest caz probabilitatea este dată de produsul probabilităților

$$P_n(t)\,[1 - A(\delta)]\,[1 - B(\delta)].$$

b) Să avem, la momentul t, $n + 1$ unități în sistem, cu probabilitatea $P_{n+1}(t)$;

în intervalul δ nu avem nici o venire, cu probabilitatea $1 - A(\delta)$;

în intervalul δ avem o singură plecare, cu probabilitatea $B(\delta)$ și, deci, probabilitatea în acest caz va fi

$$P_{n+1}(t)\,[1 - A(\delta)]\,B(\delta).$$

c) La momentul t să avem $n - 1$ unități, cu probabilitatea $P_{n-1}(t)$;

în intervalul δ să avem o singură venire, cu probabilitatea $A(\delta)$;

în intervalul δ să nu avem nici un serviciu, cu probabilitatea $1 - B(\delta)$ și deci probabilitatea acestei stări este

$$P_{n-1}(t) \cdot A(\delta)\,[1 - B(\delta)].$$

d) La momentul t să avem n unități, cu probabilitatea $P_n(t)$;

în intervalul δ să avem o venire, cu probabilitatea $A(\delta)$;

în intervalul δ să avem o plecare, cu probabilitatea $B(\delta)$.

Probabilitatea acestei situații este

$$P_n(t) \cdot A(\delta) \cdot B(\delta) = 0(\delta).$$

Deci

$$P_n(t + \delta t) = P_{n-1}(t) \cdot A(\delta)\,[1 - B(\delta)] + P_n(t)\,\{[1 - A(\delta)]\,[1 - B(\delta)]\} + P_{n+1}(t)\,B(\delta)\,[1 - A(\delta)] + 0(\delta),$$

egalitate care se mai poate scrie sub forma

$$P_n(t + \delta t) = P_{n-1}(t)\,A(\delta) + P_n(t)\,\{[1 - A(\delta)]\,[1 - B(\delta)]\} + P_{n+1}(t)\,B(\delta), \text{ pentru } n > 0 \qquad (3)$$

(neglijînd termenii care conțin pe δ la diverse puteri).

În cazul în care $n=0$, probabilitatea ca în sistem să avem, la momentul t și $t + \delta$, zero unități este dată de produsul a două probabilități, și anume:

a) $P_0(t)[1 - A(\delta)]$, care reprezintă probabilitatea ca să avem la momentul t, zero unități în sistem și zero veniri în intervalul δ;

b) $P_1(t) \cdot B(\delta)[1 - A(\delta)]$, care reprezintă probabilitatea ca la momentul t să avem o unitate în sistem, o plecare și nici o venire.

Deci

$$P_0(t + \delta) = P_0(t)\,[1 - A(\delta)] + P_1(t)\,B(\delta) \cdot [1 - A(\delta)] \qquad (4)$$

(neglijînd termenii care conțin pe δ^2 sau la puteri mai mari).

În egalitățile (3) și (4), trecînd pe $P_n(t)$, respectiv pe $P_0(t)$, în membrul întîi, împărțind cu δ și făcînd pe $\delta \to 0$ vom obține

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \dfrac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + \mu)\,P_n(t) + \mu P_{n+1}(t), & \text{pentru } n > 0 \\ \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) & \text{, pentru } n = 0. \end{cases}$$

Acest sistem ne permite să stabilim o soluție pentru problema de așteptare propusă.

2. Ecuațiile modelului în cazul echilibrului statistic

În cazul de echilibru statistic care este caracterizat prin faptul că

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0, \text{ pentru } n = 0,1,2, \ldots \text{ și deci } P_n(t) = p_n,$$

sistemul (α) de mai sus devine

$$(\alpha')\quad \begin{cases} \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + \mu)\,p_n(t) + \mu p_{n+1}(t) = 0 \\ -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) = 0. \end{cases}$$

Din cea de-a doua ecuație obținem

$$P_1(t) = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0;$$

făcînd pe $n = 1$ în prima ecuație a sistemului avem

$$p_0 - (\lambda + \mu)\,p_1 + \mu p_2 = 0$$

și înlocuind pe p_1 avem

$$\mu p_2 = (\lambda + \mu)\,\rho p_0 = \frac{\lambda^2}{\mu} p_0$$

sau

$$p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 = \rho^2 p_0.$$

Din aproape în aproape găsim

$$p_n = \rho^n p_0 \qquad (5)$$

expresie care constituie o soluție a sistemului (α').

Dacă $\rho < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1 - \rho}$$

și, ținînd seama că

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$$

sumînd egalitatea (5) obținem

$$1 = p_0 \frac{1}{1-\rho}$$

sau

$$p_0 = (1-\rho).$$

Se observă că soluția sistemului poate fi scrisă și sub forma

$$p_n = \rho^n (1-\rho).$$

Se observă imediat că maximul lui p_n corespunde pentru $\rho = \frac{n}{n+1}$.

Într-adevăr, derivînd egalitatea

$$p_n = \rho^n (1-\rho)$$

obținem

$$\rho(n+1) = n.$$

Și deci

$$\max p_n(\rho) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}.$$

3. Caracteristicile modelului

Să presupunem acum că N este numărul unităților în sistem. Atunci:

$$\sum_{j=0}^{n} p_j = \sum_{j=0}^{n} \rho^j (1-\rho) = (1-\rho)\frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho} = 1-\rho^{n+1}.$$

Deci

$$P(N \leqslant n) = 1 - \rho^{n+1},$$

iar probabilitatea complementară

$$P(N > n) = 1 - (1-\rho^{n+1}) = \rho^{n+1}.$$

De aici rezultă imediat că probabilitatea ca să avem cel puțin o unitate în sistem este

$$P(N > 0) = \rho,$$

deci este egală cu factorul de serviciu sau intensitatea de trafic.

Elementele care caracterizează modelul studiat se pot calcula acum cu ușurință, și anume:

Numărul mediu de unități în sistemul de serviciu T este dat de:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \rho)\, n\rho^n = (1 - \rho) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \rho^n = (1 - \rho) \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right).$$

Cum însă

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho^k = \frac{\rho}{1 - \rho}, \quad \text{iar} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1 - \rho}$$

rezultă că

$$T = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

Pe de altă parte, să observăm că putem scrie

$$T = S + Q,$$

unde S reprezintă numărul mediu de unități servite, iar Q — numărul mediu de unități în șirul de așteptare. Am văzut că probabilitatea p_0 ca sistemul să fie lipsit de unități este

$$p_0 = 1 - \rho.$$

Unitățile care au fost servite au probabilitatea egală cu

$$1 - (1 - \rho) = \rho.$$

Cum o singură unitate poate fi servită numai într-o unitate de timp, avem

$$\rho \cdot 1 = \rho$$

și deci

$$S = 0(1 - \rho) + 1 \cdot \rho = \rho,$$

de unde rezultă că

$$Q = \frac{\rho}{1 - \rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1 - \rho}.$$

Cu alte cuvinte, numărul mediu de unități în șirul de așteptare este dat de

$$Q = \frac{\rho^2}{1 - \rho}.$$

Între caracteristicile T și Q avem următoarea relație, care este utilă în multe aplicații:

$$\frac{T}{\mu} = \frac{Q}{\lambda}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr

$$\frac{T}{\mu} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1}{\mu\rho} \cdot \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{Q}{\lambda}.$$

În multe probleme ne interesează timpul mediu de așteptare pe unitate, pe care să-l notăm cu W. Avem

$W = M$ (număr unități în sistem $T \cdot$ timpul de serviciu pe unitate) = $= M$ (numărul unități pe sistem). M(timp serviciu pe unitate) $= T\frac{1}{\mu}$.

Deci

$$W = \frac{T}{\mu} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}.$$

Un mare interes prezintă, mai ales pentru problemele de eficiență economică, timpul mediu de așteptare în sistem pe unitate. Să-l notăm cu W^*. Pentru determinarea acestuia să considerăm două grupuri. Unul care așteaptă cu probabilitatea $1 - p_0$ și altul care nu așteaptă cu probabilitatea p_0. Rezultă că

$$W = p_0 \cdot 0 - (1 - p_0) \cdot W^*,$$

de unde

$$W^* = \frac{W}{1-p_0} = \frac{W}{\rho} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}.$$

Între W și W^* avem relația

$$W^* - W = \frac{1}{\mu}.$$

Într-adevăr

$$W^* - W = \frac{1}{\mu(1-\rho)} - \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu},$$

care reprezintă timpul mediu de serviciu.

În unele aplicații prezintă interes și o altă caracteristică și anume: Probabilitatea ca două sau mai multe unități în sistem $\leqslant 10\%$. Să notăm această probabilitate cu L și să o numim *factor de siguranță*. Avem

$$L = \sum_{n=2}^{\infty} p_n = 1 - (p_0 - p_1) = 1 - (1-\rho) - \rho(1-\rho) \leqslant 0{,}1.$$

Rezolvînd, observăm că trebuie să avem

$$\rho \leqslant 0{,}316.$$

Un rol important în stabilirea caracteristicilor sistemului îl are funcția generatoare a momentelor. Prin definiție avem

$$G(\tau) = M(e^{\tau n}),$$

unde n reprezintă numărul unităților în sistem. Avem

$$G(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\tau n} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho)\,\rho^n\, e^{\tau n} = (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} e^{\tau n} e^{n \ln \rho} =$$

$$= (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} e^{(0+\ln \rho)n} = (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} [e^{\tau + \ln \rho}]^n .$$

Cum ultima sumă este o progresie geometrică, putem scrie

$$G(\tau) = \frac{1-\rho}{1 - e^{\tau + \ln \rho}} .$$

Calculul diverselor momente este imediat. Avem

$$G'(\tau) = (1-\rho)\, e^{\tau + \ln \rho} [1 - e)^{\tau + \ln \rho}]^{-2}$$

de unde

$$G'(0) = \frac{(1-\rho)\, e^{\ln \rho}}{(1 - e^{\ln \rho})^2} = \frac{(1-\rho)\,\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

și obținem astfel un rezultat pe care l-am găsit pe altă cale

$$T = \frac{\rho}{1-\rho} .$$

Calculînd derivata a doua în raport cu τ și făcînd $\tau = 0$ obținem

$$G''(0) = \frac{\rho^2 + \rho}{(1-\rho)^2}$$

și acum putem calcula varianța numărului unităților în sistem

$$V = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} - \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho^2} .$$

Deci

$$V = \frac{\rho}{1-\rho^2} .$$

4. Aplicații

1) Să studiem fenomenul de aglomerare într-o clinică. Să presupunem că într-o zi (în 24 ore) în medie un număr de 96 pacienți solicită consultarea. Să presupunem, de asemenea, că un pacient este consultat în timp de 10 min (în medie) și că organizarea clinicii permite să se trateze un singur bolnav în fiecare unitate de timp.

Se observă imediat că sîntem în cazul unui model cu o singură stație. Să presupunem că am verificat că venirile și duratele de consultație urmează o lege exponențială negativă de parametri λ și μ.

Avem

$$\lambda = \frac{96}{24} = 4 \text{ pacienți pe oră;}$$

$$\mu = \frac{1}{10} \times 60 = 6 \text{ pacienți pe oră;}$$

$$\rho = \frac{2}{3} < 1.$$

Celelalte caracteristici se calculează imediat. Avem

$$T = \frac{\rho}{1-\rho} = 2 \text{ pacienți, } S = \rho = \frac{2}{3} \text{ pacienți,}$$

$$Q = T - S = \frac{4}{3} \text{ pacienți, } P_0 = 1 - \rho = 33 + \frac{1}{3}\%,$$

$$W = \frac{2}{6} = 1/3 \text{ oră} = 20 \text{ min; } W^* = \frac{W}{\rho} = 30 \text{ min,}$$

iar din coeficientul de siguranță rezultă că $\mu \geqslant 12{,}65$ pacienți pe oră, ceea ce corespunde la 4,8 min pentru consultarea unui pacient.

2) Vom examina acum o altă aplicație, a cărei soluție a fost dată de T. C A Y W O O D. Se consideră un circuit cu 6 stații, unde un circuit constituie un fel de „party-line" între toate stațiile, astfel încît orice stație poate să capteze orice mesaj transmis în circuit. Dat fiind faptul că s-a constatat o întîrziere în transmiterea mesagiilor, s-a pus problema analizării acestui circuit.

S-a ales o zi critică, zi în care au fost obținute următoarele date.

Stații	Mesagii transmise în plecări	Mesagii primite	Total
nr. 1	192	63	255
nr. 2	33	18	51
nr. 3	32	11	43
nr. 4	34	16	50
nr. 5	24	19	43
nr. 6	0	21	21
Total	315	148	463

Evident că sîntem în cazul unui model de așteptare. Considerînd

Circuitul	*Canalele de serviciu*
plecarea mesagiilor	veniri la stația de serviciu
transmiterea mesagiilor	servicii
întîrzieri de mesagii	șir de așteptare

Deci sîntem în cazul unui model cu o singură stație de serviciu.

Trebuie să mai adăugăm faptul că aparatele cu care erau înzestrate stațiile de transmitere aveau o capacitate de 75 cuvinte pe minut.

Scanned with OKEN Scanner

Ce probleme erau necesar să fie studiate?

1) Dacă actuala capacitate a aparatelor nu era prea mică față de serviciile ce le reveneau.

2) Ce ameliorare rezultă dacă se mută stația nr. 5 în alt circuit.

3) Ce ameliorare rezultă dacă se înlocuiesc aparatele cu unele noi, a căror capacitate este de 100 cuvinte pe minut.

Vom începe să examinăm circuitul în starea actuală. Totalul de mesagii transmise în plecări de la stațiile circuitului spre stațiile interne sau externe este de 315. Totalul mesagiilor primite de la stațiile circuitului provenind de la alte stații fie interne fie externe, este de 317. Din acestea 179 erau dublate deoarece erau sau transmisii în plecări de la stațiunile externe ale circuitului sau erau exemple de recepții transmise simultan, ce erau deja socotite, deci numărul de mesagii primite era de 317—169 = 148. Atunci rezultă că timpul total necesar pentru transmiterea de mesagii constituie 51,5% din ziua de lucru, deci 48,5% din timp circuitul rămîne inactiv. Atunci

$$p_0 = 1 - \rho \quad \text{sau} \quad 0{,}485 = 1 - \rho, \quad \rho = 0{,}515.$$

Obținem următoarele date

		P_0	T	Q	W	W*
Cazul 1	0,515	48,5%	1,06	0,55	2,12	4,12
Cazul 2	0,467	53,3%	0,88	0,41	1,76	3,77
Cazul 3	0,386	61,4%	0,63	0,24	0,95	2,46

Rezultă din aceste date că situația cea mai bună se obține cînd se înlocuiesc vechile aparate cu altele noi, a căror capacitate este de 100 cuvinte pe minut.

Observația 1. Valorile lui T și Q reprezintă mesagii, în timp ce valorile lui W și W^* reprezintă minute.

Observația 2. Pentru calcul observăm că:

$$\rho = \frac{\text{număr mediu de veniri în unitate de timp}}{\text{număr mediu de servicii efectuate de sistem în unitate de timp}}.$$

În cazul 2, avem

$$\rho = 0{,}515 \times \frac{420}{465} = 0{,}467,$$

iar în cazul 3

$$\rho = 0{,}515\,\frac{75}{100} = 0{,}386.$$

Valorile lui T, Q, W și W^* se calculează cu ajutorul formulelor

$$T = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad Q = \rho T, \quad W = \frac{T}{\mu}, \quad W^* = \frac{W}{\rho}.$$

Scanned with OKEN Scanner

5. Determinarea lui $p\,(>0)$

Să ne propunem acum să determinăm probabilitatea ca o unitate să aștepte în șir un timp superior unui timp dat. Să considerăm un moment t_0 și să vedem ce se întîmplă cu o unitate „reperată" la acest moment. Cu alte cuvinte, să calculăm probabilitatea elementară $f(\tau)\,d\tau$ ca această unitate să aștepte un timp cuprins între τ și $\tau + d\tau$. Dacă la momentul t_0, cînd unitatea noastră intră în sistem, înaintea ei erau alte n unități, atunci probabilitatea elementară de mai sus va fi dată de suma probabilităților $p\,(n,\ \tau)\,d\tau$ care reprezintă probabilitatea elementară ca la momentul t_0 în sistem să avem n unități, iar unitatea „reperată" să aștepte un timp cuprins între τ și $\tau + d\tau$.

Să observăm însă că dacă timpul de serviciu urmează o lege exponențială negativă de parametru μ, momentele terminării serviciului urmează o lege Poisson, atît timp cît stația este ocupată. Deci dacă o stație este ocupată probabilitatea ca să devină disponibilă în intervalul Δt este $\mu\Delta t$. Astfel, distribuția numărului de plecări atît timp cît stația este ocupată este dată de

$$p\,(s) = \frac{(\mu t)^s}{s!}\,e^{-\mu t}; \qquad (s = 0,1,\ \ldots).$$

Dacă $n = 0$, evident că $p\,(0,\ \tau) = 0$; vom presupune că $n > 0$. În acest caz avem

$$p\,(n,\ \tau)\,d\tau = \rho^n\,(1 - \rho) \cdot \frac{(\mu\tau)^{n-1}\,e^{-\mu\tau}}{(n-1)!}\,\mu\,d\tau$$

deoarece probabilitatea $p\,(n,\ \tau)\,d\tau$ este dată de produsul următoarelor trei probabilități:

— probabilitatea ca în sistem la începutul intervalului de timp τ să avem n unități. Cum sistemul îl presupunem în regim permanent, această probabilitate este

$$\rho^n\,(1 - \rho);$$

— probabilitatea condiționată ca sistemul să conțină n unități la momentul t_0 și să existe $s = n - 1$ unități care sînt servite și părăsesc serviciul în intervalul τ; această probabilitate, după cum rezultă din observația de mai înainte, este dată de

$$\frac{(\mu\tau)^{n-1} \cdot e^{-\mu\tau}}{(n-1)!};$$

— probabilitatea condiționată ca, cele două condiții de mai înainte fiind realizate, în intervalul $d\tau$ o singură unitate să plece din sistem, probabilitate dată de

$$\mu\,d\tau.$$

Avem

$$f(\tau)\,d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} p(n,\ \tau)\,d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (1 - \rho)\,\frac{(\mu\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mu d\tau =$$

$$= (1 - \rho)\,\rho\, e^{-\mu\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^{n-1}\,(\mu\tau)^{n-1}}{(n-1)!}$$

sau

$$f(\tau)\,d\tau = (1 - \rho)\,\rho\mu e^{-\mu\tau} d\tau \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho\mu\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\,.$$

Însă cum

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(\rho\mu\tau)^h}{h!} = e^{\rho\mu\tau},$$

rezultă că

$$f(\tau)\,d\tau = (1 - \rho)\,\rho\mu e^{-\mu\tau(1-\rho)}\,d\tau.$$

Probabilitatea ca o unitate care vine să aștepte un timp mai mare decît τ va fi deci

$$p(>\tau) = \int_{\tau}^{\infty} f(t)\,dt = (1 - \rho)\,\rho\mu \int_{\tau}^{\infty} e^{-\mu t(1-\rho)}\,dt$$

sau, făcînd calculele,

$$p(>\tau) = \rho e^{-\tau(\mu-\tau)} = \rho e^{-\frac{\tau}{\mu}(1-\rho)}\,.$$

În particular, probabilitatea ca unitatea să nu aștepte este dată de

$$1 - p(>0) = 1 - \rho$$

sau

$$p(n = 0) = 1 - \rho,$$

rezultat pe care l-am stabilit și pe altă cale.

6. Model cu șir de așteptare limitat

Să studiem un caz particular, și anume cînd șirul de așteptare are o lungime maximă dată. Vom ilustra acest caz prin următorul exemplu. Să presupunem că într-un oraș există un punct de alimentare pentru automobile, punct dotat cu o singură pompă, și că acest punct are la dispoziție un teren care permite să staționeze numai N automobile. Evident că $N - 1$ automobile formează șirul de așteptare, iar un automobil se alimentează. Cu alte cuvinte, capacitatea sistemului este N. Automobilele care trebuie să se alimenteze, dar care găsesc N automobile în sistem pleacă. Rămîn numai acelea care găsesc în șir mai puțin de $N - 1$ automobile. Evident că sîntem în cazul

unui model cu o singură stație, cu veniri infinite, însă numai un număr mărginit de stări sînt posibile, pentru valorile lui n cuprinse între 0 și N.

Am văzut că ecuațiile care caracterizează un astfel de model sînt:

$$\lambda p_0 + \mu p_1 = 0,$$
$$\mu p_{n-1} + \lambda p_{n-1} - (\lambda + \mu)\, p_n = 0.$$

În cazul nostru însă, n ia valori numai între 0 și $N - 1$. Pentru $n = N$ avem

$$\lambda p_{n-1} - \mu p_n = 0.$$

Să determinăm caracteristicile acestui model. Avem

$$1 = \sum_{n=0}^{N} p_n = p_0 (1 + \rho + \ldots + \rho^N)$$

de unde rezultă că

$$p_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N-1}},$$

iar

$$p_n = \rho^n \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N-1}}.$$

Atunci numărul mediu de unități în sistem (fie în șir, fie în curs de serviciu) este dat de

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N-1}}$$

sau

$$T = \frac{1 - \rho}{(1 - \rho)^{N+1}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n$$

sau

$$T = \frac{\rho (1 - \rho)}{1 - \rho^{N+1}} [1 + 2\rho + 3\rho^2 + \ldots + N\rho^{N-1}].$$

Dacă ținem seama de identitatea

$$(1 + 2\rho + 3\rho^2 + \ldots + N\rho^{N-1})\, (1 - \rho)^2 = 1 - (N - 1)\, \rho^N + N\rho^{N+1}$$

rezultă că

$$T = \frac{1 - (N + 1)\, \rho^N + N\rho^{N+1}}{(1 - \rho)\, (1 - \rho^{N+1})}.$$

Se observă că

$$T = \begin{cases} \rho + \rho^2 & \text{dacă} \quad \rho \ll 1, \\ \frac{1}{2} N + \frac{1}{12} N (N + 2)\, (\rho - 1), & \text{dacă} \quad \rho \to 1, \\ N - \frac{1}{\rho}, & \text{dacă} \quad \rho \gg 1. \end{cases}$$

Numărul mediu de unități în șir este dat de

$$Q = \rho^2 \cdot \frac{(1-N)\,\rho^{N-1} + (N-1)\,\rho^N}{(1-\rho)\,(1-\rho^N)}$$

sau, ținînd seama de eventualele valori ale factorului de serviciu, avem

$$Q = \begin{cases} \rho^2 + \rho^3 & \text{dacă } \rho \ll 1, \\ \frac{1}{2}(N-1) + \frac{1}{12}(N-1)\,(N+7)\,(\rho-1), & \text{dacă } \rho \to 1, \\ N - 1 - \frac{1}{\rho}, & \text{dacă } \rho \gg 1. \end{cases}$$

Se poate calcula și varianta unităților din șir. Avem

$$\sigma_T^2 = \sum_{n=0}^{N} n^2 p_n - T^2$$

sau, ținînd seama de identitatea

$$(1 + 4\rho + 9\rho^2 + \ldots + N^2\rho^{N-1})\,(1-\rho)^3 = (1+\rho)\,[1 - (N+1)^2\,\rho^N - N^2\rho^{N+1}] + 4N\,(N+1)\,\rho^{N+1},$$

rezultă că

$$\sigma_T^2 = \frac{\rho - (N+1)^2 \cdot \rho^{N+1}\,(1-\rho)^2 - 2\rho^{N+2} + \rho^{2N+3}}{(1-\rho)^2\,(1-\rho^{N+1})^2}.$$

7. Model cu timpul mediu de serviciu proporțional cu numărul unităților din sistem

Sistemul studiat este un caz particular al procesului de naștere și moarte, în care ambele fenomene (naștere și moarte) sînt poissoniene.

Am văzut că ecuațiile care caracterizează un astfel de proces sînt:

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -(\lambda_n - \mu_n)\,p_n(t) + \lambda_{n-1}\,p_{n-1}(t) + \mu_{n+1}\,p_{n+1}(t), \quad \text{dacă } n > 0,$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \quad \text{dacă } n = 0.$$

Dacă

$$\lambda_n = \lambda \quad \text{și} \quad \mu_n = \mu$$

obținem sistemul de ecuații (α) care caracterizează sistemul cu un singur canal sau o singură stație.

Să presupunem acum că

$$\lambda_n = \lambda \quad \text{însă} \quad \mu_n = n\mu.$$

În acest caz avem

$$(\beta)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_n(t)}{dt} = -(\lambda + n\mu)\, p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t)\,(n+1)\,\mu p_{n+1}(t) \\ \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t). \end{cases}$$

În regim permanent avem

$$(\beta^*)\quad \begin{cases} (n+1)\,\mu p_{n+1} = (\lambda + n\mu)\, p_n - \lambda p_{n-1} \\ \mu p_1 = \lambda p_0 \end{cases}$$

Să notăm cu

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

factorul de serviciu.

Din cea de-a doua ecuație a sistemului (β^*) obținem

$$p_1 = p_0\rho,$$

iar din cea de-a doua ecuație a aceluiași sistem, făcînd $n = 1,2, \ldots$ obținem

$$2\mu p_2 = (\lambda + \mu)p_1 - \lambda p_0.$$

Înlocuind pe $p_1 = p_0\rho$ și făcînd calculele obținem

$$p_2 = \frac{\rho^2}{2!}\, p_0$$

și procedînd în mod analog pentru $n = 2,3,\ldots$ obținem că

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!}\, p_0. \qquad (*)$$

Valoarea lui p se calculează ușor. Să sumăm egalitatea de mai sus după valorile lui n. Avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} p = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!}.$$

Cum însă

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1,$$

putem scrie

$$1 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} = p_0 + p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} = p_0 + p_0\,(e^{\rho} - 1),$$

de unde rezultă că

$$p_0 = e^{-\rho}.$$

Înlocuind valoarea lui p_0 în (*), obținem în sfîrșit că

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho}.$$

În cazul acestui model este ușor să calculăm numărul mediu $\bar{n}(t)$ de unități în sistem în regim tranzitoriu (cînd nu sîntem în regim de echilibru statistic sau regim permanent). Știm că

$$\bar{n}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n(t).$$

Înmulțind prima ecuație a sistemului (β) cu n și sumînd după valorile lui n, avem

$$\frac{d\bar{n}(t)}{dt} = -\lambda \bar{n}(t) - \mu \bar{n}(t) + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} n p_{n-1}.$$

Sau

$$\frac{d\bar{n}(t)}{dt} + \mu \bar{n}(t) = \lambda \left(-\bar{n}(t) + \sum_{n=0}^{\infty} n p_{n-1} \right) = \lambda.$$

Soluția ecuației

$$\frac{d\bar{n}(t)}{dt} + \mu \bar{n}(t) = \lambda,$$

cu condiția inițială $\bar{n}(0) = 0$, este dată de

$$\bar{n}(t) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot (1 - e^{-\mu t}).$$

Dacă $t \to \infty$, obținem

$$T = \lim_{t \to \infty} \bar{n}(t) = \rho.$$

§ 3. Mai multe stații

1. Descrierea și ecuațiile modelului

Pînă acum am studiat modele cu o singură stație. Însă în foarte multe aplicații acest model nu este aplicabil. Dacă, spre exemplu, vrem să studiem fenomenele de aglomerare: al unor automobile care intră într-o autostradă, al numărului de clienți la o bancă sau la un magazin, acestea nu pot fi studiate cu modelul avînd o singură stație. Se observă imediat că sîntem în cazul mai multor stații de serviciu (mai multe mașini pot intra în același timp în autostradă, mai mulți funcționari lucrează la bancă, un număr oarecare de vînzători deservesc clienții). Acest model prezintă importanță și din alt punct

de vedere. Anume, ne putem pune problema determinării numărului minim de stații care să permită ca un serviciu să se desfășoare în condiții optime și în același timp cu un minim de cheltuieli.

Schematic, un astfel de model este următorul (fig. 13):

Venirile sînt întîmplătoare și urmează o lege exponențială negativă de parametru λ. Cînd o stație este liberă, primul client din șir intră în stația

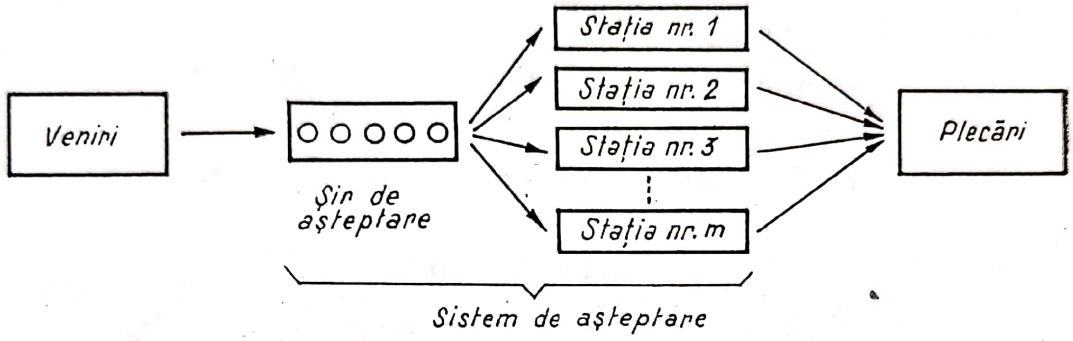

Fig. 13

respectivă. Deci, primul venit este primul servit, fără să existe vreo preferință pentru o anumită stație. Vom presupune că fiecare stație are o aceeași distribuție exponențială negativă de parametru μ.

Să presupunem că avem un model cu S stații.

Vom folosi următoarele notații:

ν — numărul de unități în așteptare în șir;

j — numărul de unități în curs de serviciu $0 < j \leqslant S$;

n — numărul total de unități (în șir plus serviciu);
evident că $n = \nu + j$;

β — numărul de stații neocupate.

Evident că dacă $j < S$, deci cînd nu toate stațiile sînt ocupate, $\nu = 0$.

Să scriem acum sistemul de ecuații care caracterizează un *model cu S stații de serviciu*.

Pentru aceasta să stabilim mai întîi probabilitatea ca o unitate să intre în sistem, respectiv să plece din sistem.

Fie n numărul de unități în sistem.

Ca și în cazul modelului cu o singură stație, probabilitatea $A(\delta)$, ca în intervalul δ să avem o venire, este dată de

$$A(\delta) = \lambda\delta + \delta h_1(\delta),$$

unde

$$\lim_{\delta \to 0} h_1(\delta) = 0,$$

iar probabilitatea $B(\delta)$ — să plece o unitate —, este

$$B(\delta) = \mu\delta + \delta h_2(\delta),$$

unde

$$\lim_{\delta \to 0} h_2(\delta) = 0.$$

Însă în cazul modelului nostru, dacă $0 \leqslant n < S$ ficcare din cele n unități poate pleca în intervalul de timp δ. Probabilitatea respectivă este

$$B_n(\delta) = 1 - [1 - B(\delta)]^n,$$

unde $1 - B(\delta)$ este probabilitatea ca nici o unitate să nu plece din sistem.

Cum evenimentele sînt independente, egalitatea de mai sus este imediată.

Să observăm însă că

$$B_n(\delta) = 1 - \{1 - nB(\delta) + \ldots \pm [B(\delta)]^n\},$$

sau

$$B_n(\delta) = nB(\delta) + \delta h(\delta) \qquad \text{pentru } n < S,$$

unde

$$\lim_{\delta \to 0} h(\delta) = 0.$$

În cazul în care toate stațiile sînt ocupate, deci cînd $n \geqslant S$, probabilitatea ca să avem o plecare este

$$B_n(\delta) = SB(\delta) + \delta h(\delta) \qquad n = S,\ S+1,\ S+2.$$

Să determinăm acum probabilitatea $P_n(t+\delta)$, ca la momentul $t+\delta$ să avem în sistem n unități.

a) Să considerăm cazul $n \leqslant S$. Atunci avem următoarele posibilități:

— la momentul t am avut n unități, iar pe intervalul de timp δ nu am avut nici o venire și nici o plecare;

— la momentul t am avut $n-1$ unități, iar în intervalul de timp δ s-a semnalat o venire și nici o plecare;

— la momentul t am avut $n-1$ unități, iar în intervalul de timp δ s-a produs o plecare și nici o venire.

Deci putem scrie

$$P_n(t+\delta) = P_n(t)\{[1 - B_n(\delta)][1 - A(\delta)]\} + P_{n-1}(t)\{A(\delta) \cdot$$
$$\cdot [1 - B_{n-1}(\delta)]\} + P_{n+1}(t)\{[1 - A(\delta)]\ B_{n+1}(\delta)\};\ \text{pentru } n < S.$$

b) În cazul în care $n = 0$, avem următoarele posibilități:

— la momentul t nu avem nici o unitate în sistem și în intervalul de timp nu se semnalează nici o venire;

— la momentul t avem o unitate în sistem, iar în intervalul de timp δ se semnalează o plecare și nici o venire.

Deci

$$P_0(t+\delta) = P_0(t)\ [1 - A(\delta)] + P_1(t)\ \{B_1(\delta)[1 - A(\delta)]\}.$$

c) În cazul în care $n \geqslant S$, evident că

$$P_n(t+\delta) = P_n(t)\{[1 + A(\delta)]\ [1 - B_S(\delta)]\} + P_{n-1}(t)\{A(\delta)\ [1 - B_S(\delta)] +$$
$$+ P_{n+1}(t)\ B_S(\delta)\ [1 - A(\delta)]\}.$$

Procedînd ca și în cazul modelului cu o singură stație, trecînd în momentul întîi pe $P_n(t)$ respectiv $P_0(t)$ și împărțind cu δ, ținînd seama de expresiile lui $A(\delta)$ și $B(\delta)$ și făcînd pe δ să tindă către zero, obținem următorul sistem:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda - n\mu) P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t),$$

$$1 \leqslant n < S$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda + S\mu) P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + S\mu P_{n+1}(t); \quad n \geqslant S.$$

Soluția acestui sistem în regim tranzitoriu este foarte complicată. Noi vom examina cazul des întîlnit în practică, cînd sîntem în regim permanent, deci cînd $P_n(t) = p_n$ = constantă. În acest caz sistemul de mai sus devine:

$$\lambda p_0 = \mu p_1,$$

$$(\lambda + n\mu)\, p_n = \lambda p_{n-1} + (n+1)\,\mu p_{n+1} \qquad 1 \leqslant n < S,$$

$$(\lambda + S\mu)\, p_n = \lambda p_{n-1} + S\mu p_{n+1} \qquad n \geqslant S.$$

Notînd cu

$$\rho = \frac{\lambda}{n}$$

factorul de serviciu sau intensitatea de trafic a unei stații de serviciu, din prima ecuație a sistemului rezultă imediat că

$$p_1 = \rho p_0.$$

În cea de-a doua ecuație a sistemului

$$(\lambda + n\mu)\, p_n = \lambda p_{n-1} + (n+1)\,\mu p_{n+1},$$

făcînd pe $n = 2, 3, \ldots$ și ținînd seama de valoarea lui p_1, obținem

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} p_0$$

sau

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \quad , \text{ pentru } n < S.$$

În ultima ecuație, punînd $n = S$, avem

$$p_{S+1} = \left(\frac{\lambda}{S\mu} + 1\right) p_S - \frac{\lambda}{S\mu} p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{S-1} \frac{1}{(S-1)!} = p_0 \rho^{S+1} \cdot \frac{1}{S!S}$$

Scanned with OKEN Scanner

și, prin recurență, obținem

$$p_n = \frac{\rho^n}{S!S^{n-S}} p_0, \text{ pentru } n \geqslant S.$$

În concluzie, soluția sistemului este dată de

$$p_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} p_0, & \text{pentru } n < S \\ \frac{\rho^n}{S^{n-S} S!} p_0, & \text{pentru } n \geqslant S. \end{cases}$$

Cum însă $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, rezultă că

$$1 = p_0 \left\{ \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=S}^{\infty} \frac{\rho^n}{S^{n-S} \cdot S!} \right\} = p_0 \left\{ \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^S}{S!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{S}\right)^j \right\}$$

sau

$$p_0 = \frac{1}{\frac{\rho^s}{S!\left(1 - \frac{\rho}{S}\right)} + \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\rho^n}{n!}}.$$

Notînd $\rho^* = \frac{\rho}{S}$ care este *factorul de serviciu sau de trafic al sistemului* (a nu se confunda cu factorul de serviciu al unei stații), putem scrie:

$$p_0 = \frac{1}{\frac{\rho^S}{S!(1-\rho^*)} + \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\rho^n}{n!}}.$$

Să observăm că soluția sistemului se mai poate scrie

$$p_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} p_0 & \text{pentru } n < S \\ \frac{\rho^S}{S!} (\rho^*)^{n-S} p_0, & \text{pentru } n \geqslant S, \end{cases}$$

deoarece

$$\frac{\rho^n}{S^{n-S} S!} = \frac{\rho^S}{S!} \left(\frac{\rho}{S}\right)^{n-S} = \frac{\rho^S}{S!} \rho^{*n-S}.$$

În plus, pentru ușurarea calculului, se vede că putem încă scrie

$$p_n = \begin{cases} \frac{\rho}{n} p_{n-1}, & \text{pentru } n < S \\ \rho^* p_{n-1} & \text{pentru } n \geqslant S. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Caracteristicile modelului

Să determinăm acum caracteristicile acestui model. *Valoarea medie a numărului de unități în șirul de așteptare* este dată de

$$\bar{\nu} = \sum_{n=S+1}^{\infty} (n - S)\, p_n,$$

căreia i se poate da o expresie simplă. Avem

$$\bar{\nu} = \sum_{n=S+1}^{\infty} (n-S) \frac{\rho^S}{S!} \rho^{*n-S} p_0 = p_0 \frac{\rho^S}{S!} \sum_{n=S+1}^{\infty} (n-S)\, \rho^{*n-S} =$$

$$= p_0 \frac{\rho^S}{S!} \{\rho^* + 2\rho^{*2} + 3\rho^{*3} + \ldots\} = p_0 \frac{\rho^* \rho^S}{S!} \{1 + 2\rho^* + 3\rho^{*2} + \ldots\}$$

însă

$$1 + 2\rho^* + 3\rho^{*2} + \ldots = \frac{d}{d\rho}(\rho^* + \rho^{*2} + \rho^{*3} + \ldots) = \frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho^*}{1-\rho^*}\right) = \frac{1}{(1-\rho^*)^2}.$$

Deci

$$\bar{\nu} = p_0 \frac{\rho^S}{S!} \cdot \frac{\rho^*}{(1-\rho^*)^2}$$

care uneori se mai scrie și sub forma

$$\bar{\nu} = p_0 \cdot \frac{\rho^{S+1}}{S \cdot S!} \frac{1}{(1-\rho^*)^2},$$

deoarece

$$\rho^* = \frac{\rho}{S}.$$

Numărul mediu al stațiilor neocupate $\bar{\beta}$ este dat de

$$\bar{\beta} = \sum_{n=0}^{S-1} (s-n)\, p_n$$

și deci

$$\bar{\beta} = \sum_{n=0}^{S-1} (S-n)\, p_n = \sum_{n=0}^{S-1} (S-n) \frac{\rho^n}{n!} p_0 = p_0 \sum_{n=0}^{S-1} (S-n) \frac{\rho^n}{n!} =$$

$$= p_0 S \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\rho^n}{n!} - p_0 \sum_{n=0}^{S-1} n \frac{\rho^n}{n!} = p_0 S \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\rho^n}{n!} - p_0 \sum_{n=1}^{S-1} \frac{\rho^n}{(n-1)!} =$$

$$= p_0 S \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\rho^n}{n!} - p_0 \rho \sum_{n=1}^{S-1} \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} = p_0 S \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\rho^n}{n!} - p_0 \rho \sum_{n=0}^{S} \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+ \rho\, p_0 \frac{\rho^{S-1}}{(S-1)!} = p_0 (S-\rho) \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\rho^n}{n!} + p_0 \frac{\rho^S}{(S-1)!} =$$

$$= p_0 \left[(S-\rho) \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^S}{(S-1)!} \right],$$

Scanned with OKEN Scanner

care se mai poate încă scrie

$$\bar{\beta} = p_0(S-\rho)\left[\sum_{n=0}^{S-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{1}{S-\rho}\cdot\frac{\rho^S}{(S-1)!}\right] =$$

$$= p_0(S-\rho)\left[\sum_{n=0}^{S-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^S}{\left(1-\frac{\rho}{S}\right)S!}\right] = p_0(S-\rho)\left[\sum_{n=0}^{S-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^S}{S!}\cdot\frac{1}{1-\rho^*}\right].$$

Sau, încă, ținînd seama de valoarea lui p_0,

$$\bar{\beta} = S - \rho.$$

Valoarea medie a numărului de unități pe sistem este prin definiție dată de

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} np_n.$$

Cum însă

$$T = \bar{\nu} + S - \bar{\beta},$$

ținînd seama de expresia lui $\bar{\beta}$, rezultă că

$$T = \bar{\nu} + \rho$$

sau

$$T = \frac{\rho^{S+1}}{S\cdot S!\,(1-\rho^*)^2}p_0 + \rho.$$

Pentru a obține *timpul mediu de așteptare în șir*, să observăm că

$$\bar{\nu} = \lambda W,$$

de unde rezultă că

$$W = \frac{\bar{\nu}}{\lambda}$$

și ținînd seama de expresia lui $\bar{\nu}$ avem

$$W = \frac{\rho^S}{S.S!\,(1-\rho^*)^2\,\mu}p_0.$$

Putem calcula acum probabilitatea ca o unitate să aștepte. Aceasta este dată de suma probabilităților p_n pentru n luînd valori de la S la ∞. Utilizînd pentru această probabilitate notația $p\ (>0)$, avem

$$p(>0) = P(n \geqslant S) = \sum_{n=s}^{\infty} p_n$$

sau

$$p(>0) = p_0\frac{\rho^S}{S!}\sum_{n=S}^{\infty}(\rho^*)^S = p_0\frac{\rho^S}{S!\,(1-\rho^*)},$$

deci

$$p(>0) = \frac{p_0 \rho^S}{S!(1-\rho^*)}.$$

În mod analog ca pentru modelul cu o singură stație se obține că probabilitatea unei așteptări de durată W (dată) este

$$p(>W) = e^{-S\mu W(1-\rho^*)}\ p(>0).$$

Și în cazul acestui model, pentru calculul diverselor caracteristici ale modelului se poate utiliza funcția generatoare. Ca și în cazul modelului cu o singură stație să notăm cu h_0 probabilitatea ca să nu avem nici o unitate în șirul de așteptare și cu h_q — probabilitatea ca o unitate care părăsește sistemul de serviciu să lase în șirul de așteptare q unități. Evident că

$$h_0 = \sum_{n=0}^{S} p_n$$

și

$$h_q = p_{S-q},$$

sau

$$h_0 = p_0 \sum_{n=0}^{S} p_n = p_0 \sum_{n=0}^{S} \frac{\rho^n}{n!}.$$

Ținînd însă seama că factorul de serviciu al sistemului este

$$\rho^* = \frac{\rho}{S},$$

rezultă că

$$h_0 = p_0 \sum_{n=0}^{S} \frac{(S\rho^*)^n}{n!}$$

și (din aceleași motive)

$$h_q = p_0 \frac{(S\rho^*)^S}{S!}\rho^* q \qquad \text{pentru} \quad q \geqslant 1.$$

Pentru p_0, scris în funcție de factorul de serviciu al sistemului avem

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{S-1} \frac{(S\rho^*)^n}{n!} - \frac{(S\rho^*)^S}{S!} \cdot \frac{1}{1-\rho^*}}.$$

Atunci funcția generatoare este dată de:

$$G(\tau) = \sum_{q=0}^{\infty} h_q \tau^q = p_0 \left[\sum_{n=0}^{S-1} \frac{(S\rho^*)^n}{n!} + \frac{(S\rho^*)^S}{S!} \cdot \frac{1}{1-\tau\rho^*} \right].$$

Derivînd în raport cu τ avem

$$G'(\tau) = p_0 \frac{(S\rho^*)^S}{S!} \cdot \frac{\rho^*}{(1-\rho^*\tau)^2},$$

iar pentru $\tau = 1$ obținem

$$M = p_0 \frac{(S\rho^*)^S}{S!} \cdot \frac{\rho^*}{(1-\rho^*)^2}$$

care este tocmai valoarea $\overline{\nu}$ calculată mai înainte.

3. Aplicație

Sisteme cu veniri și servicii limitate. Să presupunem că într-o întreprindere există o magazie centrală încadrată cu patru magazineri, care distribuie materiale muncitorilor. Să presupunem că un muncitor vine la 3 min. iar pentru deservirea lui sînt necesare 6 min. Să studiem acest caz.

Sîntem în prezența unui model cu patru stații, $\lambda = 20$ pe oră, $\mu = 10$ pe oră (pentru fiecare stație în parte).

Factorul de serviciu pe stație $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 2.$

Factorul de serviciu al sistemului $\rho^* = \frac{\rho}{S} = \frac{1}{2}.$

Să calculăm acum p_0, care constituie un parametru al modelului. Avem

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{4} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho^*}{1-\rho^*}\right]^{-1}$$

sau

$$p_0 = \left[1 + 2 + 2 \cdot \frac{2}{2} + \frac{2^3}{2 \cdot 3} + \frac{2^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right]^{-1} = 0{,}13$$

Știm că

$$P_n = \begin{cases} \frac{\rho}{n} p_{n-1}, & \text{dacă} \quad n \leqslant k \\ \rho^* \cdot p_{n-1}, & \text{dacă} \quad n > k \end{cases}$$

de unde

$$p_0 = 0{,}13, \qquad p_4 = \frac{\rho}{4} p_3 = 0{,}09,$$

$$p_1 = 0{,}26, \qquad p_5 = \frac{\rho}{4} \cdot p_4 = 0{,}045,$$

$$p_2 = \frac{\rho}{2} p_1 = 0{,}26,$$

$$p_3 = \frac{\rho}{3} \cdot p_2 = 0{,}18, \qquad p_6 = \frac{\rho}{4} \cdot p_5 = 0{,}025.$$

Scanned with OKEN Scanner

Numărul mediu al muncitorilor în magazie este

$$T = 0 \times 0{,}13 + 1 \times 0{,}26 + 2 \times 0{,}26 + \ldots = 2{,}02 \text{ muncitori};$$

$$Q = 1P_5 + 2P_6 + \ldots = 0{,}14 \text{ muncitori};$$

$$S = T - Q = 1{,}88.$$

Să calculăm acum timpii medii de așteptare. Avem

$$W = 0(p_0 + p_1 + p_2 + p_3) + \frac{1}{\mu} p_n + 2\frac{1}{\mu} p_5 \ldots = 0{,}03 \text{ ore} = 1{,}8 \text{ min};$$

$$W = \frac{W}{1 - \{p_0 + p_1 + p_2 + p_3\}} = \frac{1{,}8}{0{,}70} = 2{,}3 \text{ min}.$$

Se observă că se pierde un timp prețios din activitate și deci conducerea întreprinderii trebuie să analizeze această situație și să ia măsurile corespunzătoare (mărirea stațiilor).

§ 4. Stație unică și număr finit de unități

1. Descrierea și ecuațiile modelului

Pînă acum am considerat, în cadrul modelelor studiate, că numărul de unități care vin sînt infinite sau altfel spus, că derivă dintr-o populație infinită. În practică, de cele mai multe ori, se presupune că venirile sînt destul de mari, dar finite.

Pentru ilustrare vom considera următorul exemplu. Să presupunem că într-un atelier avem N mașini omogene — au aceleași caracteristici tehnologice — care funcționează independent unele de altele. Unele dintre mașini se pot defecta, în mod întîmplător, cu aceeași medie λ. Să presupunem că pentru reparație dispunem de un singur mecanic, care constituie unica stație de reparație, durata reparației unei mașini urmînd o distribuție exponențială negativă de parametru μ. Evident, dacă mașinile sînt de bună calitate λ este mic, iar μ relativ mare. Aceasta înseamnă că mașinile se pot defecta destul de rar, iar reparațiile sînt de scurtă durată.

Acest exemplu constituie un model de o stație unică și un număr finit de unități.

În acest caz

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

se numește tot factor de serviciu sau de întreținere.

Schematic, putem reprezenta acest model astfel (fig. 14).

Pentru a scrie ecuațiile ce caracterizează acest model, să notăm cu $P_n(t+\delta)$ starea sistemului la momentul $t+\delta$. Avem următoarele posibilități:

— la momentul t avem $N-n$ mașini în funcțiune și n care nu funcționează, deci care vin în sistemul de serviciu; nu se semnalează nici o venire în intervalul δ și nici o plecare.

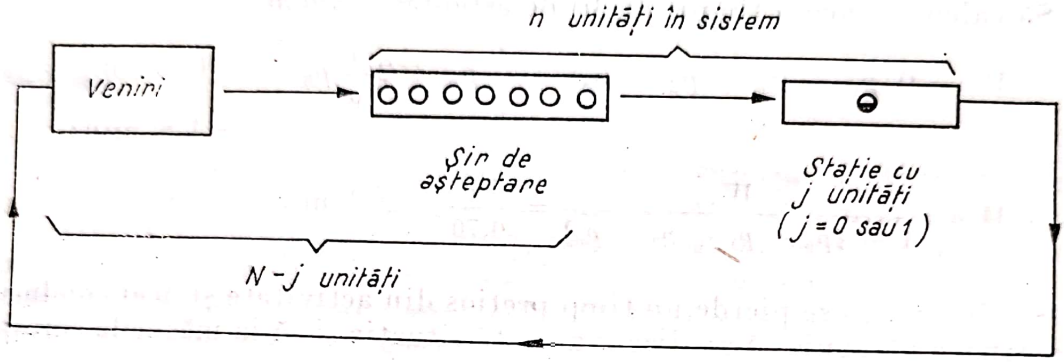

Fig. 14.

Probabilitatea ca o mașină să nu ajungă în sistemul de reparație este

$$1 - A(\delta)^{N-n},$$

iar probabilitatea ca cel puțin o mașină să intre în sistemul de reparație este dată de

$$1 - [1 - A(\delta)]^{N-n} = (N-n)\,\lambda\delta + \delta h(\delta),$$

unde

$$\lim_{\delta \to 0} h(\delta) = 0.$$

Probabilitatea ca să se termine o reparație în intervalul de timp δ este

cu $$B(\delta) = \mu\delta + \delta h_1(\delta)$$

$$\lim_{\delta \to 0} h_1(\delta) = 0;$$

Remarcăm însă că:

— la momentul t avem $n+1$ mașini în sistem, deci $N-n-1$ — mașini în funcțiune, iar în intervalul δ avem o plecare și nici o venire;

— la momentul t avem $n-1$ mașini în funcțiune, iar în intervalul δ avem o venire și nici o plecare.

Putem scrie

$$P_n(t+\delta) = P_n(t)\{1 - [(N-n)\,\lambda - \mu]\,\delta\} + P_{n+1}(t)\,\mu\delta + P_{n-1}(t)\,[N-(n-1)]\,\lambda\delta$$

sau

$$\frac{\partial P_n(t)}{\partial t} = -[(N-n)\lambda + \mu] P_n(t) + (N-n+1)\lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t).$$

Cînd $n = 0$, avem următoarele posibilități:

— la momentul t nu avem nici o mașină în sistem și nu avem nici o venire în intervalul de timp δ;

— la momentul t avem o mașină în sistem, iar în intervalul δ se produce o plecare.

Deci putem scrie

$$P_0(t+\delta) = P_0(t)[1 - N\lambda\delta] + P_1(t)\,\mu\delta$$

sau

$$\frac{\partial P_0(t)}{\partial t} = -N\lambda P_0(t) + \mu P_1(t).$$

Iar cînd $n = N$, avem

$$\frac{\partial P_N(t)}{\partial t} = -\mu P_N(t) + \lambda P_{N-1}(t).$$

Deci avem următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_0(t)}{\partial t} = -N\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \\ \dfrac{\partial P_n(t)}{\partial t} = -[(N-n)\lambda + \mu] P_n(t) + (N-n-1)\lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t), \\ \dfrac{\partial P_n(t)}{\partial t} = -\mu P_N(t) + \lambda P_{N-1}(t). \end{cases}$$

În cazul regimului permanent, sistemul de mai sus devine:

$$N\lambda p_0 = \mu p_1$$

$$[(N-n)\lambda + \mu p_n] = (N-n-1)\, p_{n-1} + \mu P_{n+1} \quad 0 < n < N$$

$$\mu p_N = \lambda p_{N-1}.$$

Se obține ușor formule de recurență

$$p_n = (N-n-1) \cdot \rho \cdot p_{n-1},$$

de unde

$$p_n = \frac{N!\,\rho^n}{(N-n)!} \cdot p_0 \qquad 0 < n \leqslant N.$$

Valoarea lui p_0 se determină imediat. Avem

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{N!\,\rho^n}{(N-n)!}}.$$

2. Caracteristicile modelului

Să calculăm acum caracteristicile acestui model.

Numărul mediu de unități în șirul de așteptare este

$$\overline{\nu} = \sum_{n=2}^{N} (n-1)\, p_n = N! \cdot p_0 \sum_{n=0}^{N} \frac{(n-1)}{(N-n)!}\, \rho^n$$

sau

$$\overline{\nu} = N - \frac{1+\rho}{\rho}(1 - p_0).$$

Numărul mediu de unități în sistem este dat de

$$T = \sum_{n=0}^{N} np_n - N! \cdot p_0 \sum_{n=0}^{N} \frac{n\rho^n}{(N-n)!}$$

sau

$$T = N - \frac{1}{\rho} \cdot (1 - p_0).$$

Valoarea medie de inactivitate a serviciului este

$$\overline{\beta} = \sum_{n=0}^{1} (1-n)\, p_n = p_0.$$

Să calculăm acum *numărul mediu de unități care nu sînt în sistem*. Avem

$$\overline{(N-n)} = \sum_{n=0}^{N} (N-n)\, p_n = \sum_{n=0}^{N} Np_n - \sum_{n=0}^{N} np_n = N - T,$$

ceea ce este evident.

Și deci

$$T = \overline{\nu} + 1 - \overline{\beta} = N - \frac{1}{\rho}(1 - p_0),$$

de unde rezultă că

$$N - T = \frac{1}{\rho}(1 - p_0).$$

Probabilitatea unei așteptări oarecare este

$$p(>0) = \sum_{n=1}^{N} p_n = 1 - p_0.$$

Pentru calculul *timpului mediu de așteptare în șir* să observăm că, în regim permanent, media de venire este nu λ ci $\lambda(\overline{N-n})$, adică $\lambda(N-T)$.

Deci

$$\overline{\nu} = \lambda(N - T)\, W$$

sau

$$W = \frac{1}{\lambda (N - T)} \sum_{n=2}^{N} (n-1)\, p_n,$$

care se poate scrie

$$W = \frac{1}{\mu}\left[\frac{N}{1-p_0} - \frac{1+\rho}{\rho}\right].$$

Timpul mediu de așteptare în sistem va fi

$$W^* = \frac{T}{\lambda (N - T)}$$

sau

$$W^* = \frac{1}{\mu}\left[\frac{N}{1-p_0} - \frac{1}{\rho}\right].$$

3. Aplicații

O singură stație. Unități limitate. 1) Să presupunem că avem un atelier mecanic în care sînt 6 mașini automate și un singur mecanic. Se pune problema stabilirii modului de aglomerare, presupunînd că factorul de serviciu $\rho = 0{,}1$.

Deci $N = 6$, $\rho = 0{,}1$.

Atunci

$$p_0 = \frac{1}{1 + 6!\left[\frac{0!}{5!} + \frac{(0,1)^2}{4!} + \frac{(0,1)^3}{3!} + \frac{(0,1)^4}{2!} + \frac{(0,1)^5}{1!} + \frac{(0,1)^6}{0!}\right]} = 0{,}484.$$

Putem calcula diversele probabilități p_n. Avem

Număr de mașini în pană	0	1	2	3	4	5	6
Număr de mașini în așteptare	0	0	1	2	3	4	5
p_n	0,484	0,290	0,145	0,058	0,017	0,003	0,000.

Rezultă atunci că

$$\bar{\nu} = 0{,}324,$$

$$p(>0) = 0{,}516,$$

iar dacă $\frac{1}{\mu} = 4$ mașini pe oră, avem

$$W = 2{,}51 \text{ ore}.$$

În acest caz se constată un fenomen de congestie.

2. În condițiile de mai sus, presupunem că

$$\rho = 2, \qquad N = 6.$$

Atunci

$$p_0 = \frac{1}{75973},$$

iar

Număr de mașini în pană	0	1	2	3	4	5	6
Număr de mașini în așteptare	0	0	1	2	3	4	5
p_n	$\frac{1}{75973}$	$\frac{1}{75973}$	0,001	0,012	0,075	0,303	0,606.

Celelalte caracteristici vor fi

$$\bar{\nu} = 4{,}5,$$

$$p(>0) = 0{,}999,$$

iar

$$W = 18 \text{ ore}.$$

În acest caz avem un fenomen de congestie marcant. Evident că un singur mecanic nu poate face față. Trebuie luate măsuri pentru lărgirea numărului de mecanici. Cu cît? Pentru aceasta este necesar să se facă un studiu economic, așa cum vom vedea în cele ce urmează.

4. Aspectul economic al fenomenului de așteptare

Teoria așteptării are o deosebită importanță economică, dacă modelul care corespunde unui fenomen natural este ales în mod corespunzător. Evident că funcția economică aleasă este arbitrară dar corespunde intereselor celui care decide.

Pentru exemplificare vom alege modelul cu număr finit de stații și număr limitat de unități. Să presupunem că într-un atelier avem N mașini și m mecanici care deservesc aceste mașini. Am văzut că numărul mediu al unităților din șirul de așteptare

$$\bar{Q} = \sum_{n=N}^{m} (n - N)\, p_n,$$

iar numărul mediu al stațiilor inactive

$$\beta = \sum_{n=0}^{N} (N - n)\, p_n.$$

Dacă se dă un interval de timp T pentru care se cere să se calculeze costul global C_g al așteptării, ne interesează în mod deosebit timpul mediu pierdut de unități, care este dat de

$$\bar{Q}T,$$

și, de asemenea, timpul mediu pierdut de serviciu

$$\beta T.$$

Dacă presupunem că C_1 este costul unei unități de timp al unei mașini, iar C_2 — costul unei unități de timp pentru un mecanic, avem

$$C_g(N) = C_1 \cdot \bar{Q} + C_2 \bar{\beta} = T\left[C_1 \sum_{n=N+1}^{m} (n - N) \cdot p_n - \left(C_2 \sum_{n=0}^{N} (N - n) p_n\right)\right].$$

Dacă C_1 și C_2 sînt constante în intervalul de timp T, atunci se poate lua în considerare prețul global pe unitate de timp

$$C(N) = \frac{C_g(N)}{T}.$$

Rezultă imediat că problema care trebuie analizată este aceea de a determina condițiile în care $C(N)$ este minim.

Exemplu: Să presupunem că avem $m = 20$ mașini, factorul de serviciu pe unitate este $\rho = 0{,}1$, cantitățile de timp le vom considera ore. În plus, să presupunem că costul pe oră al unei mașini neutilizate este de — 1 000 lei, în timp ce ora de lucru a unui mecanic revine la 10 lei. Să se analizeze care este numărul optim de mecanici.

Vom presupune că $N = 3, 4, 5, 6, 7$, și vom calcula mai întîi probabilitățile p_n, după formulele stabilite pentru modelul respectiv. Acestea vor fi

N	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9
3	0,136	0,272	0,258	0,155	0,088	0,047	0,023	0,011	0,005	0,002
4	0,146	0,272	0,278	0,166	0,071	0,028	0,010	0,003	0,001	0
5	0,148	0,296	0,281	0,168	0,071	0,022	0,006	0,001	0	0
6	0,148	0,297	0,282	0,169	0,072	0,023	0,006	0,001	0	0
7	0,148	0,297	0,282	0,169	0,072	0,023	0,006	0,001	0	0

Să determinăm acum $C(N)$. Avem

N	$\sum_{n=N-1}^{m} (n-N)\, p_n$	$\sum_{n=0}^{N} (N-n)\, p_n$	$C(N)$
3	0,32	1,20	0,32 × 100 — 1,20 × 10 = 332 lei
4	0,06	2,18	0,06 × 1 000 — 2,18 × 10 = 81,8 lei
5	0,01	3,17	0,01 × 1 000 — 3,17 × 10 = 41,7 lei
6	neglijabil	4,18	4,17 × 10 = 41,7 lei
7	neglijabil	5,16	5,16 × 10 = 51,6 lei

Se observă imediat că minimul este atins cînd numărul de mecanici afectat întreținerii mașinilor este $N = 5$.

Scanned with OKEN Scanner

§ 5. Mai multe stații și număr limitat de unități

1. Ecuațiile modelului

Acest model este mult studiat, deoarece are importante aplicații în industrie. Pentru înțelegerea modelului cu mai multă ușurință vom considera și noi un exemplu concret.

Să presupunem că într-o uzină se utilizează N mașini identice, și există m mecanici care intervin numai în momentul în care o mașină se defectează și necesită o reglare sau o reparație. Vom presupune că durata reparației unei mașini urmează o lege de distribuție exponențială negativă cu parametrul μ și că intervalul de timp dintre două întreruperi succesive, considerate

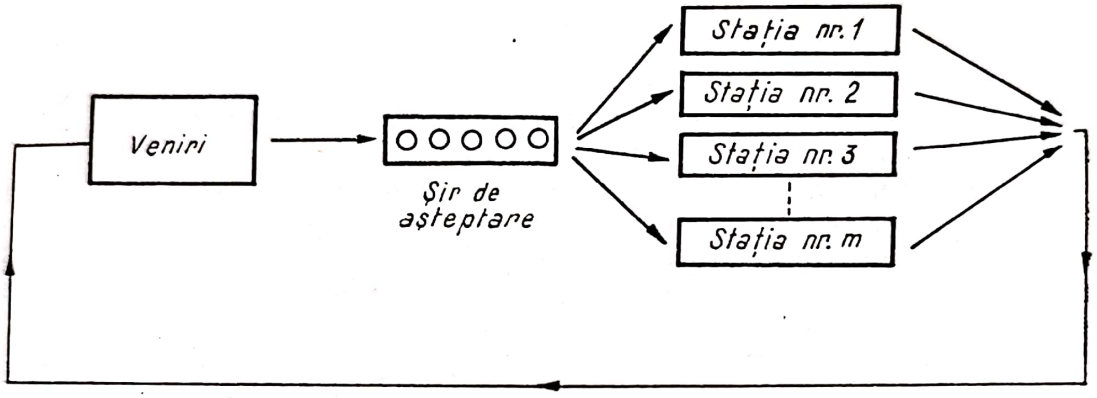

Fig. 15.

pe complexul de mașini care funcționează, urmează o lege de distribuție exponențială negativă cu parametrul $(N - n)\,\lambda$, unde λ este o constantă care, așa cum am văzut, depinde de tipul de mașină, iar $N - n$ — numărul de mașini care funcționează.

Evident că sîntem în cazul unui model de așteptare. Nu avem decît să considerăm că:

— venirile sînt mașinile care necesită o reparație;

— serviciile corespund momentelor în care se constată defectarea unei mașini;

— stațiile sînt mecanici.

Putem deci afirma că sîntem în cazul unui model de așteptare cu m stații și cu număr limitat de veniri (fig. 15).

Să scriem sistemul de ecuații care caracterizează acest model.

Fie E_n starea în care n mașini nu funcționează. Evident că dacă $n < m$ (numărul mecanicilor) nu vom avea șir de așteptare, ci vom avea $m - n$ mecanici inactivi, însă dacă $n > m$ vom avea mașini care așteaptă să fie reparate.

Să notăm cu $P_n(t + \delta)$ probabilitatea ca la momentul $t + \delta$ să avem n mașini care nu funcționează. În intervalul de timp t și $t + \delta$ avem următoarele posibilități:

— de la starea E_n pot rămîne în stare E_n cu probabilitatea

$$(1 - n\mu\delta)\,[1 - (N - n)\,\lambda\delta], \quad \text{dacă } n = m$$

și

$$(1 - m\mu\delta)\,[1 - (N - n)\,\lambda\delta], \quad \text{dacă} \quad n \geqslant m;$$

— de la starea E_{n+1} pot trece la starea E_n cu probabilitatea

$$(n + 1)\,\mu\delta, \qquad \text{dacă } n < m$$

și

$$m\mu\delta, \qquad \text{dacă } n \geqslant m;$$

— de la starea E_{n-1} pot trece la starea E_n cu probabilitatea

$$(N - n + 1)\,\lambda\delta.$$

Deci putem scrie că

$$P_n(t + \delta) = \{1 - [n\mu + (N - n)\,\lambda]\,\delta\}\,P_n(t) + (n + 1)\,\mu\delta P_{n+1}(t) + (N - n + 1)\,\lambda\delta P_{n-1}(t), \text{ dacă } n < m, \text{ și}$$

$$P_n(t + \delta) = \{1 - [m + (N - n)\,\lambda]\,\delta\}\,P_n(t) + m\mu\delta P_{n-1}(t) + (N - n + 1)\,\lambda\delta P_{n-1}(t),$$

dacă $n \geqslant m$. Pentru $n = 0$, se vede imediat că avem

$$P_0(t + \delta) = \mu\delta P_1(t) + (1 - N\lambda\delta)\,P_0(t).$$

Trecînd în membrul întîi pe $P_n(t)$, respectiv pe $P_0(t)$, împărțind cu δ și făcînd $\delta \to 0$, obținem sistemul de ecuații:

$$\frac{\partial P_0(t)}{\partial t} = \mu P_1(t) - N\lambda P_0(t),$$

$$\frac{\partial P_n(t)}{\partial t} = -[n\mu + (N - n)\lambda]P_n(t) + (n + 1)\,\mu P_{n+1}(t) + \lambda(N - n + 1)\,P_{n-1}(t)$$

dacă $1 \leqslant n < m$;

$$\frac{\partial P_n(t)}{\partial t} = -[m\mu + (N - n)\,\lambda]\,P_n(t) + m\mu P_n(t) + (N - n + 1)\,\lambda P_{n-1}(t), \quad \text{dacă} \quad m \leqslant n \leqslant N.$$

Vom da soluția acestui sistem în cazul regimului permanent, deci cînd

$$\lim_{t\to\infty} \frac{dP_n'(t)}{dt} = 0.$$

În acest caz sistemul de mai sus devine,

$$N\lambda p_0 = \mu p_1$$

$$(n + 1)\,\mu p_{n+1} = [n\mu + (N - n)\,\lambda]\,p_n - (N - n + 1)\,\lambda p_{n-1} \qquad 1 \leqslant n < m,$$

$$m\mu p_{n+1} = [m\mu + (N - n)\,\lambda]\,p_n - (N - n + 1)\,\lambda p_{n-1} \qquad m \leqslant n \leqslant N.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a găsi soluția acestui sistem să stabilim o relație de recurență. Pentru aceasta să scriem ecuația a doua a sistemului sub forma

$$(n+1)\,\mu p_{n+1} + (N-n+1)\,\lambda p_{n-1} = n\mu p_n + (N-n)\,\lambda p_n.$$

Să observăm că în această ecuație figurează expresiile

(a) $(N-n+1)\,\lambda p_{n-1}$; $\quad n\mu p_n$,
(b) $(N-n)\,\lambda p_n$; $\quad (n+1)\,\mu p_{n+1}$.

Rezultă imediat că expresiile din (b) se obțin dacă punem în expresiile (a) $n-1$ în loc de n. Aceasta înseamnă că pentru un n dat, cei doi termeni sînt egali dacă $n < m$. Pentru $n = 1$ ecuația a doua exprimă această egalitate și deci primele două ecuații ale sistemului se rezolvă folosind relația de recurență

$$(N-n)\,\lambda p_n = m\mu p_{n+1}, \text{ dacă } n \geqslant m.$$

Punînd $n = 1, 2, \ldots, m-1$, obținem

$$p_1 = \frac{N\lambda}{\mu}\, p_0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_{m-1} = \frac{(N-m+2)\,\lambda}{(m-1)\,\mu}\, p_{m-2}$$

$$p_m = \frac{(N-m+1)\,\lambda}{m\mu}\, p_{m-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_N = \frac{\lambda}{m\mu}\, p_{N-1},$$

de unde rezultă că

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{n!}\, p_0, \text{ dacă } n < m$$

și

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{N(N-1)-(N-n+1)}{m^{n-m-1}(m-1)!}\, p_0, \text{ dacă } m \leqslant n \leqslant N.$$

Notînd factorul de serviciu

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu},$$

soluțiile devin

$$p_n = C_N^n \rho^n p_0, \qquad \text{dacă } 0 \leqslant n < m$$

și

$$p_n = \frac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{m^{n-m+1}(m-1)!}\, \rho^n p_0, \text{ dacă } m \leqslant n \leqslant N.$$

2. Cîteva caracteristici

Determinarea lui p_0 se face ca și în celelalte cazuri:
observînd că $\sum_{n=0}^{N} p_n = 1$, deci

$$p_0 \left[\sum_{n=0}^{m-1} C_N^n \rho^n + \sum_{n=m}^{N} \rho^n \frac{N \dots (N-n+1)}{m^{n-m+1}(m-1)!} \right] = 1.$$

Celelalte caracteristici ale acestui model se calculează cu formulele cunoscute, adică:
numărul mediu de unități pe șirul de așteptare

$$\bar{\nu} = \sum_{n=m}^{N} (n - m)\, p_n;$$

numărul mediu de unități în sistem

$$T = \sum_{n=0}^{N} n p_n.$$

Valoarea medie de inactivitate a serviciului

$$\beta = \sum_{n=0}^{m} (N - n)\, p_n$$

și

$$p(>0) = \sum_{n=m}^{N} p_n,$$

iar

$$W = \frac{\bar{\nu}}{\mu(N - \bar{\beta})}.$$

§ 6. Modele cu timp discret

1. Ecuațiile modelului

Vom studia un model în care vom presupune că venirile urmează o lege binomială. Condițiile pe care le presupunem îndeplinite sînt următoarele:

— nu mai mult de o unitate poate intra în sistem într-un interval de timp dat. Venirile sînt independente; probabilitatea ca o venire să se producă la un moment dat este egală cu o constantă p și, evident, probabilitatea ca să nu se producă o venire este $q = 1 - p$.
Unitățile sînt servite în ordinea venirii;

— timpul de serviciu pentru diversele unități este independent și urmează o aceeași distribuție;

— o singură stație.

În aceste condiții, probabilitatea $P_{m,k}$, ca să se producă m veniri în intervalul de timp t_k (care conține k unități de timp) va fi

$$P_{m,k} = \begin{cases} C_k^m \cdot p^m \cdot q^{k-m}, & \text{dacă } 0 \leqslant m \leqslant k \\ 0, & \text{dacă } m > k. \end{cases}$$

Se observă imediat că

$$M(m) = kp$$

și

$$M(m(m-1)) = k(k-1)\,p^2.$$

Atunci numărul mediu λ de veniri în unitatea de timp este dat de

$$\lambda = \frac{E(m)}{k\delta} = \frac{p}{\delta}.$$

Pentru a determina distribuția timpului de serviciu s, să observăm că s nu poate lua decît valori întregi, multipli de S. Deci distribuția este dată de mulțimea c_k ($k = 0,1,\ldots$), astfel încît

$$P(s = k\delta) = c_k.$$

Avem

$$M(s) = \sum_{k=0}^{\infty} kC_k\delta = \delta \sum_{k=0}^{\infty} kC_k$$

și

$$M(s(s-S)) = \delta^2 \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)C_k.$$

În cele ce urmează ne vom ocupa numai de cazul în care sîntem în regim permanent (echilibru statistic). Să notăm cu P_n probabilitatea ca să avem un șir de așteptare de lungime n ($n = 0,1,\ldots$), și să notăm cu

$$R = \begin{vmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} \ldots \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} \ldots \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix},$$

unde r_{ij} este probabilitatea ca, dacă la momentul t am fost în starea i, la momentul $t+\delta$ să fim în starea j.

În cazul regimului permanent, avem

$$P_j = \sum_{i=0}^{\infty} P_i\, r_{ij}. \qquad (\alpha)$$

Să introducem acum vectorul

$$P = \left\| \begin{matrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right\|.$$

Atunci (α) devine

$$P_j = R^* P,$$

unde R^* este matricea transpusă.

Să determinăm componentele r_{ij}. Pentru aceasta însă să observăm că probabilitatea p_m ca în intervalul cît durează un serviciu să se producă m veniri este dată de:

$$P_m = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} P_{m,k} C_k = \sum_{k=m}^{\infty} C_k^m p^n q^{k-m} c_k, & m \geqslant 0, \\ 0 & m < 0. \end{cases}$$

Să vedem ce legătură există între r_{ij} și p_m. Să considerăm cazul cînd $i = 1$. Evident că

$j = i - 1 +$ numărul de unități noi ce se produc cît timp este în serviciu o unitate

și deci

$$p_m = r_{i;\, i-1+m} \qquad (i \geqslant 1)$$

sau, reorganizînd indicii,

$$r_{ij} = p_{j-i+1} \qquad (i \geqslant 1).$$

În particular, se observă că

$$r_{0j} = p_j$$

și în mod incidental

$$r_{0j} = r_{1j}.$$

În aceste condiții putem scrie

$$\left| \begin{matrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \end{matrix} \right| = \left\| \begin{matrix} p_0 & p_0 & 0 & 0 & \dots \\ p_1 & p_1 & p_0 & 0 & \dots \\ p_2 & p_2 & p_0 & p_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \end{matrix} \right\|, \qquad (\beta)$$

unde

$$p_m = \sum_{k=0}^{\infty} P_{m,k} C_k, \qquad m \geqslant 0.$$

2. Caracteristicile modelului

Calculul caracteristicilor acestui model, dată fiind observația de mai înainte, se face cu ușurință.

Să utilizăm metoda funcției generatoare. Știm că

$$G(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \theta^n.$$

Din (β), înmulțind cu θ și sumînd, obținem

$$G(\theta) = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} p_n \theta^n + P_1 \sum_{n=0}^{\infty} p_n \theta^n + P_2 \sum_{n=0}^{\infty} p_n \theta^{n+1} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p_n \theta^n (P_0 + P_1 + \theta P_2 + \theta^2 P_3 + \ldots)$$

sau

$$G(\theta) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n \theta^n \right) \frac{1}{\theta} [P_0 (\theta - 1) + G(\theta)]$$

sau

$$G(\theta) = \frac{P_0 (\theta - 1) \sum_{n=0}^{\infty} P_n \theta^n}{\theta - \sum_{n=0}^{\infty} p_n \theta^n}.$$

Notînd

$$h(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \theta^n,$$

obținem

$$G(\theta) = \frac{P_0 (\theta - 1) h(\theta)}{\theta - h(\theta)}.$$

Să observăm însă că

$$h(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n \sum_{k=n}^{\infty} C_k^n p^n q^{k-n} C_k - \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sum_{n=0}^{k} C_k^n (\theta p)^n$$

sau

$$h(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (\theta p + q)^k.$$

Avem

$$G(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1,$$

atunci, cum

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n,$$

rezultă că

$$T = G'(1).$$

Sau făcînd derivata, obținem

$$G'(\theta) = \frac{P_0\{(\theta - h)\,[h'(\theta - 1) + h] - h(\theta - 1)(1 - h')\}}{(\theta - h)^2}.$$

Aplicînd regula lui l'Hospital avem

$$\lim_{\theta \to 1} G'(\theta) = \lim_{\theta \to 1} \frac{2h'(1 - h') + \theta h''}{2(1 - h')^2}.$$

Cum însă

$$h''(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p^2 k(k - 1)(p + k)^2 C_k = \lambda^2 M(s(s - \delta)),$$

rezultă că

$$T = \lim_{\theta \to 1} G'(\theta) = \frac{P_0[2\rho(1 - \rho) + \lambda^2 M(s(s - \delta))]}{2(1 - \rho)^2},$$

unde

$$\rho = \lambda M(s) = p = \sum_{k=0}^{\infty} kC_k.$$

Să-l determinăm pe P_0. Avem,

$$G(1) = 1 = \lim_{\theta \to 0} \frac{h(\theta)\,P_0(\theta - 1)}{\theta - h(\theta)} = \frac{P_0}{1 - \rho}.$$

Deci

$$P_0 = 1 - \rho$$

și

$$T = \rho + \frac{\lambda^2 M(s(s - \delta))}{2(1 - \rho)}.$$

Dacă $\delta \to 0$, obținem

$$T = \rho + \frac{\lambda^2 M(s^2)}{2(1 - \rho)}.$$

Pentru calculul timpului de așteptare să observăm că

$$[M(W) + M(s)]\,\lambda = T,$$

de unde rezultă că

$$M(W) = \frac{1}{\lambda}[T - \rho]$$

sau, ținînd seama de valoarea lui T, obținem

$$M(W) = \frac{\lambda M[s(s-\delta)]}{2(1-\rho)}$$

care este valoarea medie a timpului de așteptare.

3. Aplicații

a) Să examinăm cazul cînd distribuția timpului de serviciu este în progresie geometrică. Avem

$$C_k = (1-d)\,d^k \qquad \text{cu } d < 1 \text{ și } k = 0, \ldots$$

Rezultă că

$$\sum_{k=0}^{\infty} kC_k = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-d)\,d^k = \frac{d}{1-d};$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\,C_k = \sum_{k=0}^{\infty} (1-d)\,d^k k(k-1) = \frac{2d^2}{(1-d)^2}.$$

Aceasta, deoarece dacă notăm:

$$f(x) = \sum_{\infty}^{k=0} x^k = \frac{1}{1-x} \text{ ptr. } x < 1$$

și cum

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ și } f'' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

rezultă că:

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

și

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\,x^k = \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

Atunci

$$M(s(s-\delta)) = \frac{2\delta^2 d^2}{1-d^2}$$

și

$$M(s) = \frac{\delta d}{1 - d^2},$$

de unde rezultă că

$$M[s(s - \delta)] = 2[M(s)]^2.$$

Avem în plus

$$T = \frac{\rho + \lambda^2 + 2M^2(s)}{2(1 - \rho)} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

și

$$M(W) = \frac{M(s)}{1 - \rho}.$$

b) Să considerăm cazul cînd distribuția timpului de serviciu este constantă și egală cu S_0. Avem

$$M(s(s - S)) = M(s^2) - \delta M(s) = S_0^2 - \delta S_0.$$

În plus

$$T = \frac{\rho + \rho^2\left(1 - \frac{\delta}{S_0}\right)}{2(1 - \rho)}$$

și

$$M(W) = \frac{\lambda(S_0^2 - \delta S_0)}{2(1 - \rho)} = \frac{S_0\rho\left(1 - \frac{\delta}{S_0}\right)}{2(1 - \rho)}.$$

§ 7. Model cu unități nedisciplinate

În unele cazuri practice, o unitate care intră în sistem și constată că are înaintea ei un număr oarecare de alte unități se hotărăște să nu aștepte să fie servită și pleacă. Cu alte cuvinte, părăsește șirul de așteptare înainte de a-i veni rîndul să fie servită. Este evident că se ia o asemenea hotărîre cu o probabilitate care depinde de numărul de unități în șirul de așteptare.

Vom examina, mai întîi, cazul în care dacă unitatea așteaptă un timp oarecare τ_0 și nu intră pe stația de serviciu, atunci părăsește sistemul.

În cazul acestui model vom presupune că unitățile vin în sistem după o lege Poisson cu parametru λ și deci probabilitatea ca o unitate să intre în sistem pe intervalul t, $t + h$ este egală cu $\lambda h + 0(h)$. Timpii de serviciu urmează o lege exponențială negativă. Unitatea servită părăsește definitiv sistemul.

Vom da soluția acestui model în cazul regimului pe echilibru statistic.

Să notăm cu $P_n(t)$ probabilitatea ca la momentul t să avem n unități în șirul de așteptare și cu $C_n(\tau_0, t)\, h + 0(h)$ — probabilitatea condiționată ca la momentul t lungimea șirului să fie n, iar unitatea să plece din șir la momentul $t + h$. Atunci, exceptînd termenii de ordin superior ai lui h, ecuațiile care caracterizează acest model sînt:

$$P_0(t + h) = P_0(t)\,(1 - \lambda h) + P_1(t)\,[M + C_1(\tau_0, t)]\cdot h$$

$$P_n(t + h) = P_{n-1}(t)\,\lambda h + P_n(t)\,(1 - \lambda h)\,1 - \mu h)\cdot[1 - C_n(\tau_0, t)\,h] +$$

$$+ P_{n+1}(t)\,[\mu + C_{n-1}(\tau_0, t)]\cdot h;\ \text{pentru } n = 1, 2, \ldots$$

Trecînd în membrul întîi pe $P_0(t)$, respectiv $P_n(t)$, împărțind cu h și făcînd pe $h \to 0$, obținem

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + [\mu - C_1(\tau_0, t)]\cdot P_1(t),$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - [\lambda + \mu + C_n(\tau_0, t)]\,P_n(t) + [\mu +$$

$$+ C_{n+1}(\tau_0, t)]\cdot P_{n+1}(t);\ n = 1, 2, \ldots$$

Cum însă $\lim\limits_{t\to\infty} P_n(t) = P_n = \text{const.}$, în cazul echilibrului statistic sistemul de mai sus devine

$$-\lambda p_0 + (\mu + C_1)\,p_1 = 0$$

$$\lambda p_{n-1} - (\lambda + \mu + C_n)\,p_n + (\mu + C_{n+1})\,p_{n+1} = 0;\ n = 1, 2, \ldots,$$

unde

$$C_n = \lim_{t\to\infty} C_n(\tau_0, t).$$

Înainte de a rezolva acest sistem să ne ocupăm de probabilitățile condiționate $C_n(\tau_0, t)$. Numărul mediu al acestora va fi

$$C(t) = \sum_{n-1}^{\infty} P_n(t)\, C_n(\tau_0, t).$$

Să vedem acum cum putem determina, în mod explicit, probabilitățile $C_n(\tau_0, t)$. Fie $C_n(\tau, x, h)\, h$ probabilitatea condiționată că dacă lungimea șirului este dată și egală cu n la momentul t, atunci la momentul x șirul este format dintr-un client al cărui timp de așteptare este cuprins între $\tau - h$ și h. Atunci probabilitatea ca un client să fie servit în intervalul de timp h este

$$\frac{\mu h}{n} + 0(h).$$

Deci putem scrie

$$C_n(\tau, t, h)\, h\left[1 - \frac{\mu h}{n} - 0(h)\right] = C_n(\tau + h, t + h, h)\, h$$

sau

$$\frac{C_n(\tau + h, t + h, h) - C_n(\tau, t, h)}{h} = -\frac{\mu}{n} C_n(\tau, t, h) - \frac{O(h)}{h}.$$

Calculînd limita pentru $h \to 0$, obținem

$$\frac{\partial}{\partial \tau} C_n(\tau, t, 0) + \frac{\partial}{\partial t} C_n(\tau, t, 0) = -\frac{\mu}{n} C_n(\tau, t, 0),$$

ecuație a cărei soluție generală este dată de

$$C_n(\tau, t, 0) = \Phi_n(t - \tau)\, e^{-\frac{\mu\tau}{n}}.$$

Să presupunem că $C_n(\tau, t, 0)$ este continuă în raport cu h (și pentru $h = 0$). În acest caz

$$C_n(\tau, t, 0)\, h = \Phi_n(t - \tau)\, e^{-\frac{\mu\tau}{n}} h + 0(h).$$

Atunci este evident că probabilitățile $C_n(\tau_0, t)\, h + 0(h)$, care intervin în descrierea modelului, pot fi identificate cu $C_n(\tau_0, t, h)\, h$ și în plus pentru orice $0 < \tau < \tau_0$ avem

$$C_n(\tau, t) = \Phi_n(t - \tau)\, e^{-\frac{\mu\tau}{n}}.$$

Rezultă atunci că

$$\lim_{t \to \infty} C_n(\tau, t) = A_n\, e^{-\frac{\mu\tau}{n}},$$

unde A_n este independentă de τ. Să observăm însă că

$$\int_0^{\tau_0} C_n(\tau, t)\, d\tau = n,$$

și deci constanta A_n este determinată de

$$n = \int_0^{\tau_0} A_n\, e^{-\frac{\mu\tau}{n}} d\tau = A_n \frac{n}{\mu}\left(1 - e^{-\frac{\tau_0 \mu}{n}}\right).$$

Urmează că în starea de echilibru

$$C_n = \frac{M e^{-\frac{\mu\tau_0}{n}}}{1 - e^{-\frac{\mu\tau_0}{n}}}. \tag{1}$$

Se verifică ușor că sistemul nostru, în cazul regimului de echilibru statistic, are soluția

$$P_n = \frac{\lambda_n P_0}{\prod_{k=1}^{n} (\mu + C_k)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

iar

$$P_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\prod_{k=1}^{\infty} (\mu - C_k)}\right]^{-1}. \tag{3}$$

Din (1), (2) și (3) rezultă că

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} P_n C_n = \lambda - \mu (1 - P_0)$$

sau ținînd seama de (3) avem

$$Q = \frac{C}{\lambda} = \frac{1 - \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \exp\left(-\frac{\mu\tau_0}{k}\right)\right]}{1 - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \exp\left(-\frac{\mu\tau_0}{k}\right)\right]}.$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VII

ELEMENTE DE STATISTICĂ MATEMATICĂ

Statistica matematică este o ramură a matematicii aplicate care se ocupă cu formularea unor legi de comportare a fenomenelor de masă pe baza studiului datelor de observație a acestor fenomene. Nu se poate spune că statistica matematică este o ramură a teoriei probabilităților; ea trebuie considerată ca o aplicație a teoriei probabilităților în sensul că această teorie constituie baza sa teoretică. Din relațiile strînse dintre teoria probabilităților și statistica matematică au rezultat avantaje reciproce pentru fiecare disciplină în parte.

În cele ce urmează ne-am propus să prezentăm mai întîi cîteva repartiții clasice (§§ 1—3) și apoi cîteva elemente de statistică matematică. În paragraful 4 expunem cîteva rezultate mai importante ale teoriei selecției, care urmărește să determine caracteristicile unei colectivități date în funcție de un număr dat de observații. Paragraful este consacrat teoriei estimației, care își propune să evalueze, pe baza observațiilor, diverșii parametri necunoscuți care intervin în repartiția teoretică pe care am admis-o. În paragraful 6 se dau cîteva noțiuni legate de verificarea ipotezelor statistice, în special a concordanței dintre repartiția de selecție și cea teoretică.

§ 1. Repartiții discrete

1. Repartiția δ_a

Cea mai simplă repartiție discretă are masa totală *1* concentrată într-un singur punct, să spunem $x = a$. Această repartiție corespunde unei variabile aleatoare ξ, care este egală cu a aproape peste tot, adică $P(\xi = a) = 1$; ea este definită de relația

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } x < a, \\ 1, \text{ pentru } x \geqslant a. \end{cases}$$

Pentru această repartiție avem

$$M(\xi) = a, \quad D(\xi) = 0, \quad \varphi(t) = e^{ita}.$$

Se poate arăta că, reciproc, dacă $D(\xi) = 0$, rezultă că întreaga masă a repartiției este concentrată într-un singur punct, așa că în mod necesar repartiția lui ξ este de forma δ_a. În general, orice repartiție discretă poate fi scrisă sub forma

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \, \delta_{a_i}(x),$$

unde $p_i = P(\xi = a_i)$.

Drept caz particular, să considerăm o variabilă aleatoare discretă ξ, repartiția corespunzătoare fiind specificată în modul următor:

$$\xi = \begin{cases} 1, & \text{cu probabilitatea } p, \\ 0, & \text{cu probabilitatea } q = 1 - p. \end{cases}$$

Repartiția acestei variabile este dată deci de relația

$$F(x) = p \, \delta_1(x) + q \, \delta_0(x).$$

Prin urmare, funcția caracteristică este

$$\varphi(t) = pe^{it} + q = 1 + p(e^{it} - 1).$$

Valoarea medie și dispersia sînt

$$M(\xi) = p \cdot 1 + q \cdot 0 = p,$$

$$D(\xi) = M((\xi - p)^2) = p(1 - p)^2 + q(0 - p)^2 = pq.$$

2. Repartiția binomială

Această repartiție a fost studiată de către J. Bernoulli. Schema pe care a dat-o Bernoulli se realizează de o succesiune de extracții independente dintr-o urnă care conține A bile albe și B bile negre. După fiecare extracție, bila extrasă se introduce din nou în urnă. Evident, compoziția urnei rămîne aceeași. Probabilitatea p de a scoate o bilă albă este constantă și egală cu

$$p = \frac{A}{A + B},$$

iar probabilitatea contrarie, adică de a extrage o bilă neagră, este

$$q = \frac{B}{A + B},$$

iar $p + q = 1$.

O astfel de schemă caracterizează repartiția binomială.

Pornind de la acest exemplu, să considerăm o serie de n experiențe independente efectuate asupra unui eveniment A, a cărui probabilitate

constantă p^* nu variază de la experiență la experiență. Să introducem variabila aleatoare ξ_k, atașată experienței de rang k:

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & \text{dacă în experiența de rang } k \text{ are loc evenimentul } A, \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Rezultă atunci că fiecare variabilă ξ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ are o repartiție discretă, valorile 1 și 0 fiind luate, respectiv, cu probabilitățile p și $q = 1 - p$, de asemenea, variabilele aleatoare ξ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ sînt independente.

Să considerăm acum variabila aleatoare

$$\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n,$$

care reprezintă numărul de apariții ale evenimentului A într-o serie de n experiențe succesive. Ținînd seama că fiecare ξ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ este o variabilă de tipul celor studiate la sfîrșitul punctului precedent, deducem, în virtutea independenței variabilelor considerate,

$$M(\xi) = np, \quad D^2(\xi) = npq.$$

Cîtul $\frac{\xi}{n}$ ne dă expresia frecvenței relative a lui A într-o serie de n experiențe succesive. Avem deci

$$M\left(\frac{\xi}{n}\right) = p, \quad D^2(\xi) = \frac{pq}{n}.$$

Funcția caracteristică a lui ξ este egală cu produsul funcțiilor caracteristice ale variabilelor aleatoare ξ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, de unde deducem

$$\varphi(t) = (pe^{it} + q)^n = (1 + p(e^{it} - 1))^n,$$

de unde, efectuînd calculele, rezultă

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, p^k \, q^{n-k} \, e^{itk}.$$

Dar această funcție caracteristică corespunde unei variabile aleatoare care poate lua valorile $k = 0, 1, \ldots, n$ cu probabilitățile

$$P_{n,k} = C_n^k \, p^k \, q^{n-k}.$$

Ținînd seama de corespondența biunivocă între repartiții și funcții caracteristice, conchidem că probabilitatea ca ξ să ia valoarea k este

$$P(\xi = k) = P_{n,k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n;$$

cu alte cuvinte, $P_{n,k}$ este probabilitatea ca evenimentul A să se producă de k ori într-o serie de n experiențe succesive. Aceasta este tocmai *repartiția binomială* și

$$F(x) = B_n(x, p) = \sum_{k=0}^{[x]} C_n^k \, p^k \, q^{n-k},$$

* Presupunem $0 < p < 1$; cazurile $p = 0$ sau $p = 1$ sînt banale și se exclud.

unde $[x]$ este cel mai mare întreg conținut în x; funcția $F(x)$ este o funcție în scară, admițînd salturile $P_{n,k}$ în punctele $k = 0,1, \ldots, n$.

Să considerăm acum șirul de probabilități $(P_{n,k})_{1 \leqslant k \leqslant n}$. În acest șir cea mai mare dintre probabilitățile $P_{n,k}$ corespunde unei valori λ (putem avea mai multe asemenea valori) care în cele n experiențe va apărea, în mod teoretic, de cele mai multe ori, în raport cu celelalte valori ale șirului. Valoarea λ astfel definită se numește *valoarea cea mai probabilă*, ea fiind dată în tabele alcătuite în acest scop. Putem însă determina valoarea cea mai probabilă și fără a utiliza tabelele. În acest scop să calculăm raportul a doi termeni vecini $P_{n,k}$ și $P_{n,k+1}$. Avem

$$\frac{P_{n,k}}{P_{n,k+1}} = \frac{C_n^k \, p^k \, q^{n-k}}{C_n^{k+1} \, p^{k+1} \, q^{n-k-1}} = \frac{k+1}{n-k} \cdot \frac{q}{p};$$

înlocuind pe k cu $k-1$, obținem

$$\frac{k}{n-k+1} \cdot \frac{q}{p};$$

să observăm însă că

$$\frac{k+1}{n-k} \cdot \frac{q}{p} > 1, \quad \frac{k}{n-k+1} \cdot \frac{q}{p} < 1,$$

de unde rezultă că

$$np - p < k < np + p.$$

Numărul întreg k, care satisface inegalitățile de mai sus, este valoarea cea mai probabilă λ, unic determinată în acest mod.

Să observăm că numărul $np + p$ nu este, în general, un număr întreg; în cazul acesta, nici numărul $np - q$ nu este întreg. În cazul excepțional cînd $np + p$ este un număr întreg, avem pentru λ două valori; pentru că în acest caz și $np - q$ va fi un număr întreg, cele două valori ale lui λ vor corespunde probabilităților

$$P_{n,np-q} = P_{n,np+p}.$$

Rezultă deci că valoarea cea mai probabilă este foarte apropiată de np, adică de media lui ξ. Prin urmare, pentru repartiția binomială, modul diferă foarte puțin de valoarea medie.

Pentru calculul momentelor centrate, folosim definiția dată; obținem atunci

$$\mu_2 = \sigma^2 = npq$$

$$\mu_3 = npq(q - p),$$

$$\mu_4 = 3n^2p^2q^2 + npq\,(1 - 6pq)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pentru coeficienții de asimetrie și exces, avem expresiile

$$\gamma_1 = 1 - \frac{q-p}{npq}, \quad \gamma_2 = \frac{1-6pq}{npq}.$$

Să considerăm acum două variabile aleatoare independente ξ_1 și ξ_2, avînd, respectiv, repartițiile $B_{n_1}(x, p)$ și $B_{n_2}(x, p)$; un calcul simplu ne arată că suma $\xi_1 + \xi_2$ va avea repartiția $B_{n_1+n_2}(x, p)$; cu alte cuvinte, pentru repartițiile binomiale are loc o proprietate de aditivitate. Rezultatul se extinde, evident, la cazul unui număr finit de variabile aleatoare.

Să reamintim că repartiția binomială intervine în teorema lui Bernoulli.

Rezultatele de mai sus se pot extinde la cazul cînd probabilitatea evenimentului A variază de la experiență la experiență; obținem astfel repartiția binomială generalizată $B_n(x; p_1 \dots p_n)$. Funcția caracteristică corespunzătoare este

$$\varphi(t) = \overset{n}{D^2}_{k=1} (p_k e^{it} + q_k),$$

unde p_k este probabilitatea evenimentului A în experiența de rang k, $1 \leqslant k \leqslant n$, iar valoarea medie și dispersia sînt date de relațiile

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{n} p_k, \; D^2(\xi) = \sum_{k=1}^{n} p_k q_k.$$

Pentru această repartiție are loc teorema lui Poisson.

Pentru aceste repartiții are loc teorema lui Moivre:

Teorema 1. *Repartiția* $B_n\left(\sum_{k=1}^{n} p_k + x\sqrt{\sum_{k=1}^{n} p_k q_k};\; p_1, \dots, p_n\right)$ *a variabilei aleatoare normate* $\dfrac{\xi - \sum_{k=1}^{n} p_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} p_k q_k}}$ *tinde către* $\Phi(x)$ *cînd* $n \to \infty$, *dacă seria* $\sum_{k=1}^{n} p_k q_k$ *este divergentă.*

Demonstrație. Într-adevăr, să verificăm condițiile teoremei lui Leapunov. Avem

$$\sigma_k^2 = p_k q_k,$$

$$\rho_k^3 = p_k q_k (p_k^2 + q_k^2) \leqslant p_k q_k$$

și deci

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k q_k,$$

$$\rho^3 \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k q_k,$$

adică

$$\frac{\rho}{\sigma} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} p_k q_k\right)^{-\frac{1}{6}},$$

expresie care tinde către zero cînd $n \to \infty$.

O b s e r v a ț i e. În cazul binomial obișnuit cînd $p_1 = \ldots = p_n = p$, seria care intervine în teorema de mai sus este, evident, divergentă. O condiție suficientă pentru divergența seriei $\sum_{k=1}^{\infty} p_k q_k$ este ca să existe un număr $c > 0$ astfel încît $c < p_k < 1 - c$, $1 \leqslant k < \infty$; se poate demonstra că dacă această serie converge, repartiția limită nu este normală.

3. Repartiția multidimensională

La punctul precedent am studiat repartiția binomială, punînd-o în legătură cu un șir de variabile aleatoare ξ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, care puteau lua valorile 1 și 0 cu probabilitățile p și q, $p + q = 1$.

Ca o extensiune naturală a acestui caz să considerăm că $k = (k_1, \ldots, k_m)$ este un punct dintr-un spațiu liniar n-dimensional în care luăm drept bază vectorii liniari independenți

$$e_1 = (1,0,0, \ldots, 0),$$
$$e_2 = (0,1,0, \ldots, 0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e_m = (0,0,0, \ldots, 1).$$

Să definim acum o familie de variabile aleatoare vectoriale independente $(\xi_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, în care fiecare variabilă ξ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ poate lua vectorii e_j cu probabilitățile p_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$.

Prin *repartiție multinomială* vom înțelege repartiția vectorului

$$\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n.$$

Egalitatea $\xi = k$ înseamnă că în cele n experiențe succesive vectorul e_1 s-a prezentat de k_1 ori, vectorul e_2 de k_2 ori ș.a.m.d., $k_1 + \ldots + k_m = n$. Se poate arăta, ca și la punctul precedent, că

$$P(\xi = k) = P_{n,k_1 \ldots k_m} = \frac{n!}{k_1! \ldots k_m!} p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m},$$

iar repartiția corespunzătoare este dată de expresia

$$F(x_1, \ldots, x_m) = B_n(x_1, \ldots, x_m; p_1, \ldots, p_m) = \sum \frac{n!}{k_1! \ldots k_m!} p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m},$$

suma extinzîndu-se la toate valorile $k_j \geqslant 0$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $\sum_{j=1}^{m} k_j = n$ și $0 \leqslant k_j \leqslant [x_j]$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Repartiția multinomială poate fi pusă în evidență și pe un model cu o urnă. Să considerăm o urnă cu a_j bile de culoare j, $1 \leqslant j \leqslant m$, probabilitatea de a extrage o bilă de culoare j fiind

$$p_j = \frac{a_j}{a_1 + \ldots + a_m}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Probabilitatea $P_{n,k_1 \ldots k_m}$ reprezintă probabilitatea ca după n experiențe succesive independente să obținem k_1 bile de culoare 1, k_2 bile de culoare 2, ș.a.m.d., $k_1 + \ldots + k_m = n$.

Rezultatele limită amintite la punctul precedent se extind, evident, și la cazul repartiției multinomiale.

4. Repartiția Poisson

Am văzut cînd am studiat repartiția binomială, că probabilitatea ca un eveniment A, cu probabilitatea constantă p, să aibă loc de k ori în n experiențe independente succesive este dată de

$$P_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

În cele ce urmează vom presupune că p este foarte mic și n suficient de mare, astfel încît

$$np = \lambda,$$

unde λ este o constantă.

Să examinăm ce expresii vor lua probabilitățile de mai sus în acest caz, considerînd că $n \to \infty$. Obținem

$$P_{n,k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Însă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} = 1$$

și

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda}.$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} P_{n,k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0,1, \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom spune că o variabilă aleatoare ξ urmează o *repartiție Poisson*, cu parametrul $\lambda > 0$, dacă valorile sale posibile sînt 0, 1, 2, ... și dacă avem

$$P_k = P(\xi = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \; k = 0,1,2, \ldots$$

Această repartiție mai poartă și numele de *legea evenimentelor rare*, deoarece se întîlnește în cazul unor evenimente care se întîmplă rar.

Sîntem deci în cazul unei variabile aleatoare discrete care admite o infinitate numărabilă de valori, obținută prin trecerea la limită într-o repartiție binomială, iar repartiția este dată de relația

$$F(x) = P(x; \lambda) = \sum_{k=0}^{[x]} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Vom calcula pentru repartiția Poisson cîteva valori caracteristice. Pentru valoarea medie avem

$$M(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

Pentru a calcula momentul de ordinul doi, să observăm că

$$\alpha_2 = M_2(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} ((k-1)+1) \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!},$$

de unde rezultă că

$$M_2(\xi) = \lambda^2 + \lambda.$$

Acum putem calcula dispersia variabilei ξ. Avem

$$D^2(\xi) = M_2(\xi) - M_1^2(\xi) = \lambda.$$

În mod analog se pot calcula și celelalte momente; obținem

$$\alpha_3 = \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3$$

$$\alpha_4 = \lambda + 7\lambda^2 + 6\lambda^3 + \lambda^4,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Momentele centrate se obțin imediat:

$$\mu_2 = \lambda$$

$$\mu_3 = \lambda$$

$$\mu_4 = \lambda + 3\lambda^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pentru coeficienții de asimetrie și exces, deducem

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\lambda}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Momentele de diferite ordine le putem calcula și cu ajutorul funcției caracteristice. Se știe că între derivatele funcției caracteristice și momente, cînd acestea există, avem următoarea relație

$$i^k M_k(\xi') = \left(\frac{d^k(\varphi(t))}{dt^k}\right)_{t=0}. \tag{1}$$

Funcția caracteristică a variabilei ξ, care urmează repartiția Poisson cu parametrul λ, este dată de

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} e^{itk} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Derivînd succesiv funcția caracteristică, obținem

$$\varphi'(t) = i\lambda e^{\lambda(e^{it}-1)} e^{it}$$

$$\varphi''(t) = i^2 e^{\lambda(e^{it}-1)} (\lambda^2 e^{2it} + \lambda e^{it})$$

$$\varphi'''(t) = i^3 \lambda e^{it} (\lambda^2 e^{2it} + \lambda e^{it}) + i^3 e^{\lambda(e^{it}-1)} (2\lambda^2 e^{2it} + \lambda e^{it})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

și, ținînd seama de (1), deducem

$$\alpha_1 = \lambda$$

$$\alpha_2 = \lambda + \lambda^2$$

$$\alpha_3 = \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Pentru repartițiile Poisson are loc o proprietate de aditivitate ca și în cazul repartițiilor binomiale. Anume, dacă ξ_1 și ξ_2 sînt două variabile aleatoare independente urmînd, respectiv, repartițiile $P(x; \lambda_1)$ și $P(x; \lambda_2)$, atunci $\xi = \xi_1 + \xi_2$ urmează repartiția $P(x; \lambda_1 + \lambda_2)$. Într-adevăr, folosind funcțiile caracteristice, rezultatul este imediat. Această proprietate se extinde, evident, pentru un număr finit oarecare de variabile aleatoare.

Să amintim că pentru repartiția Poisson are loc

Teorema 2. *Repartiția* $P(\lambda + x\sqrt{\lambda}; \lambda)$ *a variabilei aleatoare normate* $\frac{\xi - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ *tinde către* $\Phi(x)$ *cînd* $\lambda \to \infty$.

Demonstrație. Într-adevăr, această variabilă normată are funcția caracteristică

$$e^{-it\sqrt{\lambda} + \lambda\left(e^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}} - 1\right)} = e^{-\frac{t^2}{2} + \frac{(it)^3}{3!\sqrt{\lambda}} + \cdots}$$

care, evident, tinde către $e^{-\frac{t^2}{2}}$ cînd $\lambda \to \infty$.

O b s e r v a ț i e. Repartiția Poisson poate fi extinsă la cazul multidimensional, urmînd metoda expusă la punctul 2 și expusă mai sus; rezultatele astfel obținute sînt cu totul analoge cu cele arătate mai sus.

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. Repartiții înrudite cu cea normală

1. Repartiția χ^2.

Fie ξ o variabilă aleatoare normală $(0,1)$; rezultă că densitatea de repartiție a variabilei ξ^2 este

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{dacă } x > 0, \\ 0, & \text{dacă } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Funcția caracteristică corespunzătoare lui ξ^2 este

$$\varphi_{\xi^2}(t) = \int_0^\infty e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1-2it}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1-2it}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = (1-2it)^{-\frac{1}{2}},$$

dacă ținem seama de relația

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} dx = \frac{\Gamma(\lambda)}{\alpha^\lambda}, \quad \alpha > 0, \quad \lambda > 0,$$

unde

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-x} dx, \ \lambda > 0$$

este funcția gamma, iar $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Observație. Se verifică imediat că funcția

$$\gamma(x;\ \alpha,\ \lambda) = \begin{cases} \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}, & \text{dacă } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

este o densitate de repartiție în raport cu x; ea duce la *repartiția gamma*, dată de

$$F(x) = \int_0^x \gamma(u;\ \alpha,\ \lambda)\, du.$$

Funcția caracteristică a acestei repartiții este

$$\varphi(t) = \int_R e^{itx} \gamma(x;\ \alpha,\ \lambda)\, dx = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-(\alpha-it)x} dx =$$

$$= \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot \frac{\Gamma(\lambda)}{(\alpha-it)^\lambda} = \left(1 - \frac{it}{\alpha}\right)^{-\lambda}. \qquad (1)$$

Fie acum $(\xi_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ n variabile aleatoare independente normale $N(0,1)$ și să considerăm variabila aleatoare

$$\chi^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2.$$

Ținînd seama că fiecare variabilă aleatoare ξ_k^2, $1 \leqslant k \leqslant n$, are funcția caracteristică $(1 - 2it)^{-\frac{1}{2}}$, rezultă că funcția caracteristică a lui χ^2 va fi

$$\varphi_{\chi^2}(t) = (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}.$$

Dacă facem acum în (1) $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}n$, găsim tocmai funcția caracteristică de mai sus, căreia îi va corespunde densitatea de repartiție

$$h(x; n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{dacă } x > 0, \\ 0, & \text{dacă } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Această funcție este descrescătoare pentru $n \leqslant 2$; pentru $n > 2$ ea admite un singur maxim în punctul $x = n - 2$.

Repartiția corespunzătoare, cunoscută sub numele de *repartiția lui Helmert-Pearson*, este dată de relația

$$H(x; n) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^x u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} du;$$

numărul n care intervine în expresia de mai sus poartă numele de *numărul de grade de libertate* corespunzătoare repartiției considerate. Vom vedea că această repartiție joacă un rol central în statistica matematică la problema verificării ipotezelor statistice.

Deducem că momentele corespunzătoare acestei repartiții sînt date de expresia

$$\alpha_s = n(n+2)\ldots(n+2s-2),\ s = 1, 2, \ldots, ;$$

în particular

$$\alpha_1 = n,\ D(\chi^2) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 2n.$$

Semiinvarianții sînt dați de relația

$$\varkappa_s = 2^{s-1}(s-1)!\, n.$$

De asemenea, primele patru momente centrate au valoarea

$$\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 2n,\ \mu_3 = 8n,\ \mu_4 = 12n(n+4),$$

de unde rezultă următoarele expresii pentru coeficienții de asimetrie și exces

$$\gamma_1 = 2^{\frac{3}{2}} n^{-\frac{1}{2}},\ \gamma_2 = 12n^{-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie acum χ_1^2 și χ_2^2 două variabile aleatoare independente care urmează, respectiv, repartițiile $H(x; n_1)$ și $H(x; n_2)$. Un calcul imediat efectuat asupra funcțiilor caracteristice corespunzătoare ne arată că suma $\chi_1^2 + \chi_2^2$ va urma tot o repartiție de același tip, adică $H(x; n_1 + n_2)$; cu alte cuvinte, și pentru această repartiție are loc proprietatea de aditivitate.

Pentru repartiția χ^2, există tabele pentru determinarea probabilității P ca variabila χ^2 să depășească o cantitate dată χ_0^2, adică

$$P = P(\chi^2 > \chi_0^2) = \int_0^\infty h(x; n)\, dx = 1 - H(\chi_0^2; n).$$

În general, în tabele, P este dat sub forma $\frac{p}{100}$.

Să dăm și

Teorema 1. *Repartiția* $H(n + x\sqrt{2n}; n)$ *a variabilei normate* $\frac{\xi - n}{\sqrt{2n}}$ *tinde către* $\Phi(x)$ *cînd* $n \to \infty$.

Demonstrație. Într-adevăr, funcția caracteristică a variabilei normate este

$$e^{-it\sqrt{\frac{n}{2}}}\left(1 - it\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{-\frac{n}{2}};$$

să alegem pe n suficient de mare, astfel încît pentru fiecare t fix această funcție caracteristică să se poată scrie sub forma

$$\left(1 + \frac{t^2}{n} + \theta\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{3}{2}}|t|^3\right)^{-\frac{n}{2}}, \quad |\theta| \leqslant 1.$$

Cînd $n \to \infty$, această expresie tinde către $e^{-\frac{t^2}{2}}$, de unde rezultă tocmai afirmația teoremei.

O b s e r v a ț i e. Probabilitatea inegalității

$$\sqrt{2\chi^2} < \sqrt{2x} + x$$

poate fi scrisă sub forma

$$\chi^2 < n + \left(x + \frac{x^2}{2\sqrt{2n}}\right)\sqrt{2n};$$

cînd $n \to \infty$, x rămînînd fix, $\frac{x^2}{2\sqrt{2n}}$ tinde către 0, așa că probabilitatea inegalității de mai sus tinde către aceeași limită ca și probabilitatea inegalității

$$\chi^2 < n + x\sqrt{2n}$$

adică către $\Phi(x)$. Rezultă deci că repartiția variabilei $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n}$ tinde către $\Phi(x)$ cînd $n \to \infty$. Această aproximație poate fi îmbunătățită dacă se înlocuiește $2n$ cu $2n - 1$.

Să amintim acum cîteva repartiții legate de repartiția χ^2.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă variabilele aleatoare independente $(\xi_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sînt normale $N(0, \sigma)$, atunci, evident, variabilele normate $\left(\frac{\xi_k}{\sigma}\right)_{1\leqslant k\leqslant n}$ urmează o repartiție χ^2 cu n grade de libertate cu densitatea

$$\frac{1}{\sigma^2} h\left(\frac{x}{\sigma}\,;\ n\right) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}.$$

Prin transformări analoge, putem determina densitățile de repartiție ($x > 0$) ale următoarelor variabile aleatoare:

Variabila aleatoare	Densitatea de repartiție
$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2$	$\frac{n}{\sigma^2} \cdot h\left(\frac{nx}{\sigma^2}\,;\ n\right)$
$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2}$	$\frac{2x}{\sigma^2} \cdot h\left(\frac{x^2}{\sigma^2}\,;\ n\right)$
$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2}$	$\frac{2nx}{\sigma^2} \cdot h\left(\frac{nx^2}{\sigma^2}\,;\ n\right)$.

Observație. Se poate demonstra că repartiția $H(x; n)$, cînd $n \to \infty$, tinde către repartiția normală $N(0,1)$.

2. Repartiția t

Fie ξ și $(\xi_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ $n+1$ variabile aleatoare independente normale $N(0, \sigma)$ și să punem

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2}\,.$$

Ne propunem să determinăm repartiția $S(x; n)$ a variabilei aleatoare

$$t = \frac{\xi}{\eta}.$$

Ținînd seama de faptul că ξ și η sînt variabile aleatoare independente, rezultă că densitatea de repartiție a lui t este dată de produsul dintre densitatea de repartiție a lui ξ și densitatea de repartiție a lui η (dată la punctul precedent); obținem

$$\frac{1}{\sigma}\Phi'\left(\frac{u}{\sigma}\right) \cdot \frac{2nv}{\sigma^2} h\left(\frac{nv^2}{\sigma^2}\,;\ n\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\sigma^{n+1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot v^{n-1} e^{-\frac{u^2+nv^2}{2\sigma^2}} = C_n v^{n-1} e^{-\frac{u^2+nv^2}{2\sigma^2}}.$$

Avem atunci

$$S(x;\ n) = C_n \iint\limits_{\substack{v>0 \\ u<xv}} v^{n-1}\, e^{-\frac{u^2+nv^2}{2\sigma^2}}\, du\, dv.$$

Făcînd transformarea de variabile

$$u = wz, \quad v = z$$

și, ținînd seama că jacobianul acestei transformări este z, deducem

$$S(x;\ n) = C_n \int_{-\infty}^{x} dw \int_0^{\infty} z^n\, e^{-\frac{n+w^2}{2\sigma^2} z^2}\, dz =$$

$$= 2^{\frac{n-1}{2}}\, \sigma^{n+1}\, \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) C_n \int_{-\infty}^{x} \frac{dw}{(n+w^2)^{\frac{n+1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^{x} \frac{dw}{\left(1+\frac{w^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Densitatea de repartiție corespunzătoare este

$$s(x;\ n) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}. \tag{2}$$

Repartiția $S(x;\ n)$ poartă numele de *repartiția t a lui Student*, iar n se numește *numărul de grade de libertate*.

Din expresia lui $S(x;\ n)$ se observă că această repartiție nu depinde de σ; de asemenea, ea este unimodală și simetrică în raport cu $x = 0$. Momentul α_s este finit pentru $s<n$; în particular, valoarea medie este finită pentru $n>1$ și dispersia pentru $n>2$. Datorită simetriei, toate momentele de ordin impar sînt nule, iar cele pare au expresia

$$\alpha_{2s} = \mu_{2s} = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2s-1)\, n^s}{(n-2)(n-4)\ldots(n-2s)};$$

în particular, deducem de aici pentru $s = 1$

$$D^2(\xi) = \frac{n}{n-2}.$$

Amintim că pentru repartiția t există tabele analoge ca și pentru repartiția χ^2. De asemenea, are loc

Teorema 2. *Repartiția* $S(x;\ n)$ *tinde către* $\Phi(x)$ *cînd* $n \to \infty$.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Într-adevăr, folosind formula lui Stirling, logaritmul expresiei din (2) devine

$$-\frac{n+1}{2}\log\left(1+\frac{x^2}{n}\right)$$

care, pentru $n\to\infty$, tinde către $-\frac{x^2}{2}$; prin urmare,

$$s(x;\ n)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

cînd $n\to\infty$. Fie acum $r=\left[\frac{n+1}{2}\right]$; atunci $r\geqslant\frac{n}{2}$ și pentru orice $n\geqslant 1$ și orice $x\in R$, avem

$$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\geqslant\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{r}\geqslant 1+r\frac{x^2}{n}\geqslant 1+\frac{x^2}{2}.$$

Rezultă că șirul $(s(x;\ n))_{n\in N}$ este uniform mărginit de o funcție de forma $A\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^{-1}$, de unde deducem că

$$S(x;\ n)\to\Phi(x),$$

cînd $n\to\infty$.

3. Repartiția Snedecor și repartiția z

Să considerăm $m+n$ variabile aleatoare independente normale $N(0,\ \sigma)$, $(\xi_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ și $(\eta_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ și fie

$$\xi=\sum_{k=1}^{m}\xi_k^2,\qquad \eta=\sum_{j=1}^{n}\eta_j^2.$$

Ne propunem să determinăm repartiția $F_{m,\,n}(x)$ a variabilei aleatoare

$$\gamma=\frac{\xi}{\eta}.$$

Evident, $F_{m,\,n}(x)$ se anulează pentru $x<0$ deoarece $x\geqslant 0$. Pentru $x>0$, vom folosi metoda de la punctul precedent; obținem atunci

$$F_{m,\,n}(x)=\frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}\,\sigma^{m+n}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\iint\limits_{\substack{v>0\\0<u<xv}}u^{\frac{m}{2}-1}\,v^{\frac{n}{2}-1}\,e^{-\frac{u+v}{2\sigma^2}}\,du\,dv=$$

$$=C_{m,\,n}\iint\limits_{\substack{v>0\\0<u<xv}}u^{\frac{m}{2}-1}\,v^{\frac{n}{2}-1}\,e^{-\frac{u+v}{2\sigma^2}}\,du\,dv=$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= C_{m,n} \int_0^x u^{\frac{m}{2}-1}\, du \int_0^\infty v^{\frac{m+n}{2}}\, e^{-\frac{u+1}{2\sigma^2}}\, dv =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^x \frac{u^{\frac{m}{2}-1}}{(u+1)^{\frac{m+n}{2}}}\, du.$$

Densitatea de repartiție corespunzătoare este

$$f_{m,n}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(x+1)^{\frac{m+n}{2}}}.$$

Ca și repartiția t, și această repartiție nu depinde de σ.

Dacă facem schimbarea de variabilă

$$x = \frac{m}{n} y,$$

obținem densitatea de repartiție corespunzătoare *repartiției lui Snedecor* cu m și n grade de libertate:

$$\rho(x;\, m,\, n) = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n} \cdot y\right)^{-\frac{m+n}{2}}$$

corespunzătoare variabilei

$$s = \frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{n}} \gamma = \frac{n}{m} \gamma.$$

Momentele corespunzătoare repartiției lui Snedecor sînt date de expresiile

$$\alpha_s = \left(\frac{n}{m}\right)^s \frac{\Gamma\left(s + \frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2} - s\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} =$$

$$= \frac{n^s}{m^s} \cdot \frac{m(m+2) \ldots (n+2s-2)}{(n-2)(n-4) \ldots (n-2s)}, \qquad s = 1, 2, \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

În particular,

$$\alpha_1 = \frac{n}{n-2}\,(n>2),\quad \alpha_2 = \frac{n^2(m+2)}{m(n-2)(n-4)},\qquad (n>4)$$

și

$$D^2(s) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}.$$

Pentru $m>2$, repartiția lui s are un mod unic în punctul $x = \frac{m-2}{m}\cdot\frac{n}{n+2}$.

Să considerăm acum variabila aleatoare z definită de relația

$$e^z = s.$$

Pentru a găsi repartiția lui z, vom observa că atunci cînd x crește de la 0 la ∞, z crește strict de la $-\infty$ la $+\infty$; astfel, relația $z<x$ este echivalentă cu relația $\gamma < \frac{m}{n}e^{2x}$ și deci repartiția lui z este

$$P(z<x) = P\left(\gamma < \frac{m}{n}e^{2x}\right) = F_{m,n}\left(\frac{m}{n}e^{2x}\right).$$

Densitatea corespunzătoare este, evident, egală cu

$$2\,\frac{m}{n}e^{2x}\,f_{m,n}\left(\frac{m}{n}e^{2x}\right) = 2m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{e^{mx}}{(me^{2x}+n)^{\frac{m+n}{2}}}.$$

Obținem astfel densitatea de repartiție corespunzătoare *repartiției z a lui Fisher.*

4. Repartiția beta

Folosind notațiile de la punctul precedent, să considerăm variabila aleatoare

$$\lambda = \frac{\gamma}{1+\gamma},$$

unde, evident, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$. În acest caz densitatea de repartiție corespunzătoare lui λ se anulează în afara intervalului (0,1). Cînd γ crește de la 0 la ∞, λ crește strict de la 0 la 1 și deci relația $\lambda<x$ este echivalentă cu relația $\gamma < \frac{x}{1-x}$. Prin urmare, repartiția lui λ este dată de

$$P(\lambda<x) = P\left(\gamma < \frac{x}{1-x}\right) = F_{m,n}\left(\frac{x}{1-x}\right),$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde deducem expresia următoare pentru densitatea de repartiție corespunzătoare

$$\frac{1}{(1-x)^2} f_{m,n}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{(m+n)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}-1} =$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}-1},$$

unde, în general,

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p > 0, \quad q > 0.$$

Repartiția lui λ este un caz particular de *repartiție beta*, dată de densitatea de repartiție

$$\beta(x; p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1}, \quad 0 < x, < 1,$$

și care se obține pentru $p = \frac{m}{2}$, $q = \frac{n}{2}$.

Momentele acestei repartiții $B(x; p, q)$ sînt date de expresiile

$$\alpha_s = \int_0^1 x^s \beta(x; p, q)\, dx = \frac{\Gamma(p+s)}{\Gamma(p)} \cdot \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+q+s)} =$$

$$= \frac{p(p+1)\ldots(p+s-1)}{(p+q)(p+q+1)\ldots(p+q+s-1)}.$$

În particular, deducem din ultima relație

$$\alpha_1 = \frac{p}{p+q}, \quad \alpha_2 = \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)}$$

și dispersia corespunzătoare

$$\alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}.$$

Amintim că pentru $p > 1$, $q > 1$, repartiția beta admite un mod unic în punctul $x = \frac{p-1}{r+q-2}$.

De asemenea, are loc

Teorema 3. *Repartiția* $B(x; np, nq)$ *corespunzătoare variabilei normate*

$$\frac{\xi - \frac{p}{p+q}}{\sqrt{\frac{pq}{(p+q)^2(np+nq+1)}}}$$

tinde către $\Phi(x)$ *cînd* $\to n\infty$.

Demonstrația se face analog cu cea dată la teorema 2 și nu vom mai insista asupra ei.

Scanned with OKEN Scanner

§ 3. Alte repartiții continue

1. Repartiția uniformă

O variabilă aleatoare ξ urmează *repartiția uniformă* sau *rectangulară* dacă repartiția sa este dată de

$$F(x) = \int_a^x \rho(x)\, dx,$$

unde

$$\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{dacă} \quad x \in [a, b], \\ 0, & \text{dacă} \quad x \notin [a, b]; \end{cases}$$

deci

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}.$$

Momentele corespunzătoare acestei repartiții sînt

$$\alpha_s = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^s dx = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{b^{s+1} - a^{s+1}}{b-a};$$

în particular,

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(a+b), \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

și deci

$$D^2(\xi) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2.$$

Funcția caracteristică este dată de expresia

$$\varphi(t) = \frac{1}{it} \cdot \frac{e^{itb} - e^{ita}}{b-a}.$$

Să observăm că printr-o schimbare liniară de variabilă putem transforma intervalul $[a, b]$ în intervalul unitate $[0, 1]$; să notăm în acest caz cu $\rho_1(x)$ densitatea corespunzătoare:

$$\rho_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [0,1], \\ 0, & \text{dacă } x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Fie acum $(\xi_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ n variabile aleatoare independente uniform repartizate în intervalul $[0, 1]$ și să considerăm suma

$$\xi_{(n)} = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n;$$

dacă notăm cu $\rho_n(x)$ densitatea de repartiție a lui $\xi_{(n)}$, rezultă că $\rho_n(x)$ se anulează în exteriorul intervalului $[0, n]$.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci

$$\rho_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_1(x-u)\,\rho_n(u)\,du = \int_{x-1}^{x} \rho_n(u)\,du$$

și deci din această relație obținem

$$\rho_2(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in [0,1], \\ x - 2(x-1), & \text{dacă } x \in [1,2], \end{cases}$$

$$\rho_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & \text{dacă } x \in [0,1], \\ \frac{1}{2}(x^2 - 3(x-1)^2), & \text{dacă } x \in [1,2], \\ \frac{1}{2}(x^2 - 3(x-1)^2 + 3(x-2)^2), & \text{dacă } x \in [2,3]. \end{cases}$$

În general,

$$\rho_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}(x^n - C_n^1(x-1)^{n-1} + C_n^2(x-2)^{n-2} - \ldots),$$

unde $x \in [0, n]$, suma continuîndu-se atît timp cît expresiile x, $x-1$, $x-2$, ... sînt pozitive.

Este interesant de observat că ρ_1 este o funcție discontinuă, ρ_2 este continuă dar are o derivată discontinuă, ρ_3 are o derivată continuă dar o derivată secundă discontinuă ș.a.m.d.

Un calcul direct ne dă

$$M(\xi_{(n)}) = \frac{n}{2}, \quad D^2(\xi_{(n)}) = \frac{n}{12}.$$

O b s e r v a ț i e. Se poate demonstra că repartiția variabilei aleatoare normate corespunzătoare lui $\xi_{(n)}$ tinde către $\Phi(x)$ cînd $n \to \infty$.

2. Repartiția Cauchy și repartiția Laplace

În cazul particular $n = 1$, repartiția t ne dă densitatea de repartiție

$$\frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

căreia îi corespunde funcția caracteristică $e^{-|t|}$.

Printr-o transformare liniară obținem densitatea de repartiție

$$c(x;\lambda,\mu) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-\mu)^2}, \lambda > 0$$

cu funcția caracteristică

$$\mu i t - \lambda |t|.$$

Repartiția $C(x; \lambda, \mu)$ definită de densitatea de repartiție $c(x; \lambda, \mu)$ se numește *repartiția Cauchy*. Ea este unimodală și simetrică față de punctul $x = \mu$, care reprezintă modul și mediana repartiției. Această repartiție nu admite nici un fel de momente. Cvartilele sînt egale cu $\mu \pm \lambda$.

Dacă o variabilă ξ urmează o repartiție $C(x; \lambda, \mu)$, atunci orice transformare liniară a lui ξ de forma $a\xi + b$ urmează repartiția $C(x; |a|\lambda, a\mu + b)$.

Vom mai aminti proprietatea de aditivitate a acestei repartiții. Anume, dacă variabilele aleatoare independente $(\xi_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ urmează repartițiile $C(x; \lambda_k, \mu_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, atunci suma $\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ urmează repartiția $C\left(x; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k, \sum_{k=1}^{n} \mu_k\right)$. De aici deducem că dacă toate variabilele ξ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, urmează aceeași repartiție $C(x; \lambda, \mu)$, atunci media aritmetică $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ urmează aceeași repartiție.

Să considerăm acum densitatea de repartiție

$$\frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

Printr-o transformare liniară, obținem densitatea de repartiție

$$l(x; \lambda, \mu) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}},$$

care definește *repartiția Laplace* $L(x; \lambda, \mu)$. Această repartiție admite momente de orice ordin și funcția sa caracteristică este dată de expresia

$$\frac{e^{\mu it}}{1 + \lambda^2 t^2}.$$

O b s e r v a ț i e. Această repartiție este strîns legată de repartiția Cauchy prin relațiile

$$\frac{1}{2}\int_R e^{itx-|x|}\, dx = \frac{1}{1+t^2}, \quad \frac{1}{\pi}\int_R \frac{e^{-itz}}{1+z^2}\, dt = e^{-|x|}.$$

3. Repartițiile Pearson

Majoritatea repartițiilor continue, considerate mai înainte, avînd densitățile $y = f(x)$ verifică ecuația diferențială de ordinul întîi

$$y' = \frac{x + a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} y, \tag{3}$$

unde a, b_0, b_1, b_2 sînt constante. Această ecuație diferențială a fost considerată de K. Pearson, care a arătat că constantele care intervin în (3) pot fi exprimate cu ajutorul primelor patru momente ale densității de repartiție

Scanned with OKEN Scanner

corespunzătoare, dacă ele sînt finite. Soluțiile se clasifică după natura rădăcinilor ecuației $b_0, + b_1 x + b_2 x^2 = 0$. În cele ce urmează vom aminti numai o parte din repartițiile care se pot obține din (3); constanta A din expresiile următoare trebuie așa fel determinată, încît funcția respectivă să reprezinte o densitate de repartiție.

Tipul I. $y = A(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}$, $a < x < b$, $p > 0$, $q > 0$.

Pentru $a = 0$, $b = 1$ obținem repartiția beta. Pentru $p = q = \frac{1}{2} b^2$, $a = -b$ și făcînd $b \to \infty$, obținem repartiția normală ca formă limită. O altă formă limită se deduce pentru $q = b\alpha$ cu $b \to \infty$; după schimbarea notației, obținem

Tipul III. $y = A(x-\mu)^{\lambda-1} e^{-\alpha(x-\mu)}$, $x > \mu$, $\alpha > 0$, $\lambda > 0$.

Această densitate de repartiție este o generalizare a funcției $\gamma(x; \alpha, \lambda)$, considerată în § 2, 1 și deci conține ca un caz particular repartiția χ^2.

Tipul VI. $y = A(x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}$, $x > b$, $a < b$, $q > 0$, $p + q < 1$. Pentru $a = -1$, $b = 0$, obținem densitatea de repartiție $f_{m,n}(x)$, considerată în § 2, 3.

Tipul VII. $y = A((x-\alpha)^2 + \beta^2)^{-m}$, $x \in R$, $m > \frac{1}{2}$.

Această relație conține ca un caz particular repartiția t, considerată în § 2, 2.

§ 4. Noțiuni de teoria selecției

1. Considerații generale

În statistica matematică vom porni întotdeauna de la o colectivitate sau populație statistică. Să vedem ce înțelegem printr-o colectivitate statistică. Fie o mulțime (finită sau infinită) de elemente cu diverse caractere, apariția fiecărui element de o caracteristică dată, avînd o anumită frecvență; dacă pentru apariția unui element cu o caracteristică dată există o probabilitate determinată, atunci mulțimea de elemente considerate reprezintă o colectivitate statistică. Existența unei probabilități determinate reprezintă o ipoteză care se introduce fie apriori, fie pe baza constanței condițiilor exterioare în care se produce realizarea fizică a mulțimii considerate de elemente.

O grupă de n elemente observate prin experiențe se numește selecție sau eșantion de volum n. Problema care se pune în teoria selecției constă în determinarea caracteristicilor colectivității statistice (momente, mediană etc.) cu ajutorul acestor n elemente $x_1, \ldots, x_n$.

Repartiția colectivității statistice $F(x)$ o vom numi repartiție teoretică, iar variabilele $x_1, \ldots, x_n$ variabile de selecție*. *Repartiția de selecție* este definită de relația $F_n^*(x) = \frac{\nu_n(x)}{n}$, unde $\nu_n(x)$ este numărul variabi-

* Unii autori folosesc calificativul „empiric" pentru „de selecție".

lelor de selecție $\leqslant x$. Prin funcție de selecție vom înțelege o funcție de forma $f(x_1, \ldots, x_n)$, adică o funcție care depinde de datele selecției. Evident că putem lua în considerare numeroase astfel de funcții; de exemplu, media de selecție

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

sau momentul de selecție de ordinul r

$$a_r = \int_R x^r \, dF_n^* (x) = \frac{x_1^r + \ldots + x_n^r}{n}.$$

2. Media de selecție

Fie $x_1, \ldots, x_n$ o selecție de volum n. Am văzut că media de selecție este dată de

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

Să presupunem că repartiția teoretică $F(x)$ are primele două momente finite. Ne propunem să determinăm momentele mediei de selecție x în funcție de momentele teoretice

$$\alpha_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \, dF(x).$$

Avem

$$a_1 = M(\bar{x}) = M\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} M(x_i) = \alpha_1, \; a_2 = M(x^2) =$$

$$= M\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} M(x_i^2) + \frac{2}{n^2} \sum_{j,k=1}^{n} M(x_j x_k) =$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} M(x_j^2) + \frac{2}{n^2} \sum_{j<k} M(x_j) \, M(x_n) = K$$

și prin urmare

$$s^2 = m_2 = D^2(x) = a_2 - a_1^2 = \frac{\alpha_2}{n^2} + \frac{n-1}{n} \alpha_1^2 - \alpha_1^2 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1^2}{n} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

De aici rezultă în virtutea inegalității lui Cebîșev, că $\bar{x}$ converge către a_1 în probabilitate; vom vedea mai tîrziu că media de selecție reprezintă o estimație absolut corectă.

Scanned with OKEN Scanner

Să vedem acum în ce condiții repartiția asimptotică a mediei de selecție este dată de repartiția normală. Din teorema Leapunov rezultă

Teorema 1. *Dacă momentele de primele trei ordine există, atunci repartiția mediei de selecție normate tinde către* $\Phi(x)$ *cînd* $n \to \infty$.

În unele cazuri, repartiția mediei de selecție se poate determina pentru valori finite ale lui n. Mai precis, vom demonstra următoarele teoreme.

Teorema 2. *Dacă repartiția teoretică este normală* $N(m, \sigma)$, *atunci repartiția mediei de selecție este de asemenea normala* $N\left(x, m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Demonstrație. Utilizînd funcția caracteristică avem

$$\varphi(t) = M(e^{it\bar{x}}) = M\left(e^{i\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k}\right)$$

sau, ținînd seama că cele n experiențe sînt independente, obținem

$$\varphi(t) = \prod_{k=1}^{n} M(e^{i\frac{t}{n}x_k}).$$

Notînd $\frac{t}{n} = u$, obținem

$$\varphi(u) = \prod_{k=1}^{n} M(e^{iux_k}).$$

Dar

$$M(e^{iux_k}) = e^{mui - \frac{\sigma^2u^2}{2}}$$

și deci

$$\varphi(u) = e^{nmui - \frac{n\sigma^2u^2}{2}};$$

cum însă $u = \frac{t}{n}$, avem

$$\varphi(t) = e^{mti - \frac{\sigma^2u^2}{2n}}.$$

Însă aceasta este funcția caracteristică a unei repartiții normale $N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Cu aceasta teorema este demonstrată dacă ținem seama de teoremele de convergență.

Teorema 3. *Dacă repartiția teoretică este o repartiție Poisson* $P(x; \lambda)$, *atunci repartiția mediei de selecție are ca funcție caracteristică expresia*

$$\varphi(t) = e^{n\lambda(e^{i\frac{t}{n}} - 1)}.$$

Demonstrație. Ca și în teorema 2, avem

$$\varphi(u) = \prod_{k=1}^{n} M(e^{iux_k}), \quad u = \frac{t}{n}.$$

Însă funcția caracteristică a repartiției Poisson este dată de

$$\varphi(u) = e^{\lambda(e^{iu}-1)}$$

și deci

$$\varphi(u) = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda(e^{iu}-1)} = e^{n\lambda(e^{iu}-1)}.$$

Cum însă $u = \frac{t}{n}$, obținem

$$\varphi(t) = e^{n\lambda\left(e^{i\frac{t}{n}}-1\right)}$$

și cu aceasta teorema este demonstrată.

3. Momente de selecție

Momentul de selecție de ordinul k este dat de

$$a_r = \frac{x_1^r + \ldots + x_n^r}{n}$$

și, așa cum se vede, este o funcție de selecție. Avem

$$M(a_r) = M\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^r}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} M(x_i^r)}{n} = \alpha_r,$$

iar

$$D(a_r) = \frac{1}{n^2} M\left[\sum_{k=1}^{n} (x_k^r - a_r)^2\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} M(x_k^r - a_r)^2 = \frac{\alpha_{2r} - \alpha_r^2}{n}.$$

Aceasta ne arată că momentul de selecție a_r converge în probabilitate către momentul teoretic α_r, dacă α_r și α_{2r} există, în virtutea inegalității lui Cebîșev.

Se poate demonstra, ca și în cazul mediei de selecție, că dacă există momentele α_r, α_{2r} și $M(|a_r - \alpha_r|^3)$, atunci repartiția lui ar tinde către $\Phi(x)$ cînd $n \to \infty$.

O funcție de selecție des utilizată în aplicații o constituie momentul centrat de selecție de ordinul r, definit prin expresia

$$m_r = \frac{(x_1 - \bar{x})^r + \ldots + (x_n - \bar{x})^r}{n}.$$

Se vede că m_r depinde de $x_1, \ldots, x_n$ și este deci o funcție de selecție. Se pot determina și momentele lui m_r. Acestea duc la calcule mai complicate.

Scanned with OKEN Scanner

§ 5. Noțiuni de teoria estimației

1. Considerații generale

În numeroase aplicații ale statisticii matematice presupunem că repartiția fenomenului pe care-l studiem este dată de o funcție cunoscută, ai cărei parametri însă nu-i cunoaștem. Vom spune că o astfel de repartiție reprezintă o repartiție specificată. Dacă cunoaștem și valorile luate de parametri vom spune că avem o *repartiție complet specificată.*

Problema centrală a teoriei estimației o constituie elaborarea unor metode care să ne permită să determinăm valorile numerice ale parametrilor unei repartiții specificate. Pentru aceasta vom considera o selecție $x_1, \ldots, x_n$, deci n experiențe independente* care ne vor da o valoare informativă pentru determinarea valorilor parametrilor care intervin în repartiția respectivă.

În cele ce urmează, ne vom ocupa numai de cazul în care variabilele aleatoare sînt continue, presupunînd în plus că legea are un singur parametru. Fie $f(x, \theta)$ o familie de densități de repartiție, care depind de un parametru θ; oricare ar fi θ, avem

$$f(x, \theta) \geqslant 0, \int_R f(x, \theta)\, dx = 1.$$

Vom presupune că $\theta \in R$ și că $f(x, \theta)$ este continuă și derivabilă în raport cu θ. În densitatea de repartiție dată nu cunoaștem însă parametrul θ. Vom face n experiențe independente care ne dau valorile $x_1, \ldots, x_n$ și ne propunem să deducem valoarea lui θ. Aceasta constituie tocmai problema estimării parametrului θ. Fie $\overline{\theta}(x) = \overline{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ o funcție de cele n observații $x_1, \ldots, x_n$.

Funcțiile $\overline{\theta}(x)$ cu ajutorul cărora determinăm valoarea lui θ se numesc *funcții de estimație.* Dacă $\overline{\theta}(x)$ tinde în probabilitate către θ vom spune că $\overline{\theta}(x)$ reprezintă o funcție de estimație *corectă* a lui θ.

Vom utiliza însă alte tipuri de convergență, pentru mai multă precizie, întrucît există o infinitate de funcții $\overline{\theta}$ care converg în probabilitate către θ. Mai precis, vom folosi convergențe în medie pătratică**, despre care am

---

* Se poate face o teorie analogă și în cazul cînd renunțăm la ipoteza de independență; ea iese însă din cadrul acestui curs.

** Fie $(\xi_n)_{1 \leqslant n < \infty}$ un șir de variabile aleatoare și ξ o variabilă aleatoare. Să presupunem că

$$\int_\Omega |\xi_n|^r\, dP, \quad n = 1,2, \ldots,$$

și

$$\int_\Omega |\xi|^r\, dP$$

există.

Vom spune că șirul de variabile aleatoare $(\xi_n)_{1 \leqslant n < \infty}$ converge în medie de ordinul r (întreg $\geqslant 1$) către ξ, dacă

$$\lim_{n \to \infty} \left(\int_\Omega |\xi_n - \xi|^r\, dP \right)^{\frac{1}{r}} = 0.$$

văzut că implică convergența în probabilitate. Am demonstrat că un șir de variabile aleatoare care converge în medie de ordinul $r > 1$ converge și în probabilitate.

Dacă $\overline{\theta}(x)$ converge în medie pătratică către θ, evident că $\overline{\theta}$ constituie o funcție de estimație corectă, putem avea

$$M(\overline{\theta}) = \theta$$

sau

$$M(\overline{\theta}) = \theta + \alpha(\theta).$$

În primul caz spunem că funcția $\overline{\theta}$ este o funcție de estimație *absolut corectă*, iar în al doilea caz — o funcție de estimație *corectă*. În acest ultim caz $\alpha(\theta)$ tinde către zero cînd $n \to \infty$.

2. Funcții de estimație eficiente

Există o infinitate de funcții de estimație absolut corecte. Ne propunem s-o alegem pe cea mai precisă. Cu alte cuvinte, ne propunem să determinăm dintre funcțiile de estimație absolut corecte pe aceea care are dispersia cea mai mică. În acest scop vom stabili cîteva teoreme.

Este evident că pentru a avea egalitatea de mai sus este necesar și suficient ca

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\xi_n = \xi|^r \, dP = 0.$$

Se poate demonstra următoarea

Teoremă. *Dacă* $(\xi_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *converge în medie de ordinul* r *către* ξ, *atunci* $(\xi_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *converge și în probabilitate către* ξ.

Demonstrație. Să presupunem că $(\xi_n)_{1\leqslant n<\infty}$ nu converge în probabilitate către ξ. Atunci, din definiția convergenței în probabilitate, rezultă că există $\varepsilon \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$ și un șir de numere $n_i \to \infty$, astfel încît

$$P(|\xi_{n_i} - \xi| \geqslant \varepsilon) \geqslant \eta$$

pentru orice i. Însă

$$\left[\int_\Omega |\xi_{n_i} - \xi|^r \, dP\right] \geqslant \left[\int_{\{x_i\,|\xi_m - \xi|\geqslant\varepsilon\}} |\xi_{n_i} - \xi|^r \, dP\right]^{\frac{1}{r}} \geqslant \left[\varepsilon^r P(|\xi_{n_i} - \xi| \geqslant \varepsilon)\right]^{\frac{1}{r}} \geqslant$$

$$\geqslant (\varepsilon^r \eta)^{\frac{1}{r}} = \varepsilon \eta^{\frac{1}{r}}$$

ceea ce ne duce la o contradicție, deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_\Omega |\xi_n - \xi|^r \, dP\right]^{\frac{1}{r}} = 0$$

și deci și

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_\Omega |\xi_{n_i} - \xi|^r \, dP\right]^{\frac{1}{r}} = 0.$$

Prin urmare șirul $(\xi_n)_{1\leqslant n<\infty}$ converge în probabilitate către ξ.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 1. *Fie* $f(x, \theta)$ *o familie de densităţi de repartiţie şi*

$$\bar{\theta}(x) = \bar{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$$

o funcţie de estimaţie absolut corectă. Atunci

$$D^2[\bar{\theta}(x)] \geqslant \frac{1}{n\int_R \left[\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta}\right]^2 dx}.$$

Demonstraţie. Funcţia $f(x, \theta)$ fiind o densitate de repartiţie, avem

$$\int_R f(x, \theta)\, dx = 1.$$

Derivînd în raport cu θ, obţinem

$$\int_R \frac{\partial f(x,\theta)}{\partial \theta} dx = 0,$$

care se mai poate scrie

$$\int_R \frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta} f(x, \theta)\, dx = 0.$$

Din ultima egalitate, ţinînd seama de definiţia valorii medii, rezultă că

$$M\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial \theta}\right) = 0.$$

Însă

$$M(\bar{\theta}) = \int_{V_n} \bar{\theta}(x_1, \ldots, x_n) \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)\, dx_1 \ldots dx_n = \theta, \tag{1}$$

deoarece sîntem în cazul unei estimaţii absolut corecte, şi deci

$$M(\bar{\theta}) = \theta;$$

am notat aici cu V_n regiunea din R_n în care se găseşte punctul de coordonate $x_1, \ldots, x_n$.

Derivînd (1) în raport cu θ, obţinem

$$\int_{V_n} \bar{\theta}(x_1, \ldots, x_n) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f(x_i,\theta)}{\partial \theta} \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)\, dx_1 \ldots dx_n = 1$$

sau

$$\int_{V_n} (\bar{\theta} - \theta) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f(x_i, \theta)}{\partial \theta} \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)\, dx_1 \ldots dx_n = 1, \tag{2}$$

deoarece am văzut că

$$M\left(\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta}\right) = 0.$$

Din (2) rezultă atunci

$$M\left[(\bar{\theta} - \theta) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f(x_i, \theta}{\partial \theta}\right] = 1.$$

Aplicînd inegalitatea lui Schwarz, avem

$$\left\{M\left[(\bar{\theta} - \theta) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f(x_i, \theta)}{\partial \theta}\right]\right\}^2 \leqslant D(\bar{\theta} - \theta)\, D\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f(x_i, \theta}{\partial \theta}\right)$$

sau, ținînd seama de (3)

$$1 \leqslant D(\bar{\theta} - \theta)\, D\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f(x_i, \theta)}{\partial \theta}\right).$$

Întrucît observațiile x_i sînt independente, putem scrie

$$D^2\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f(x_i, \theta)}{\partial \theta}\right) = n\, D^2\left(\frac{\partial \ln f(x_i, \theta)}{\partial \theta}\right)$$

și deci

$$D^2(\bar{\theta} - \theta) \geqslant \frac{1}{nD^2\left(\frac{\partial \ln f(x_i, \theta)}{\partial \theta}\right)}$$

și cu aceasta teorema este demonstrată*.

Aplicație. Să presupunem că variabila aleatoare f urmează o repartiție Poisson. Să arătăm că momentul de selecție de ordinul întîi constituie pentru λ o estimație absolut corectă. În acest caz

$$f(x, \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

iar

$$\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \lambda} = \frac{k}{\lambda} - 1.$$

Să calculăm acum

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\partial \ln f(x,\lambda)}{\partial \lambda}\right]^2 f(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{\lambda} - 1\right)^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Am văzut însă că pentru o repartiție Poisson

$$\alpha_1 = \lambda, \quad \alpha_2 = \lambda + \lambda^2$$

și deci

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{k} - 1\right)^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

* Teorema demonstrată este adevărată și pentru repartiții statistice discontinue.

Rezultă atunci că

$$D^2(\bar{\lambda} - \lambda) \geqslant \frac{\lambda}{n}$$

cu alte cuvinte că marginea inferioară a dispersiilor tuturor estimațiilor posibile ale parametrului λ este $\frac{\lambda}{n}$.

Vom enunța acum o teoremă pe care însă nu o vom demonstra.

Teorema 2. *Fie $f(x, \theta)$ o familie de densități de repartiție și*

$$\bar{\theta}(x) = \theta(x_1, \ldots, x_n)$$

o funcție de estimație absolut corectă. Dacă

$$\ln f(x, \theta) = A'(\theta)[L(x) - \theta] + A(\theta) + N(x), \tag{4}$$

unde $N(x)$, $L(x)$ sînt funcții de x, iar $A(\theta)$, — o funcție de θ, atunci

$$D^2(\bar{\theta}(x)) = \frac{1}{n\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta}\right]^2 f(x, \theta)\,dx};$$

funcția pentru care avem această egalitate este dată de

$$\bar{\theta}(x) = \frac{L(x_1) + \ldots + L(x_n)}{n}.$$

În acest caz vom spune că funcția $\bar{\theta}(x)$ este o funcție de estimație *eficientă*.

Evident că funcții de estimație eficiente nu există decît în cazul cînd funcția $f(x, \theta)$ este de forma (4).

Raportul

$$e(\bar{\theta}) = \frac{\dfrac{1}{n\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta}\right]^2 f(x, \theta)\,dx}}{D^2(\bar{\theta})}$$

se numește *eficiența* lui θ. Numai pentru funcțiile de estimație eficiente $e(\bar{\theta}) = 1$. Însă, așa cum se vede, eficiența $e(\bar{\theta})$ este o funcție de n.

3. Funcții de estimație suficiente

Să considerăm o repartiție continuă, avînd densitatea de repartiție $f(x, \theta)$. Vom arăta că teorema 1 se poate extinde și la funcții de estimație corecte.

Fie $\bar{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \theta(x)$ o funcție de estimație corectă.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci

$$M(\theta(x)) = \theta + \alpha(\theta),$$

unde $\alpha(\theta) = \alpha(n, \theta)$ este deci funcție și de n și $\lim_{n\to\infty} \alpha(n, \theta) = 0$.

Și în cazul funcțiilor de estimație corecte se poate demonstra că se obține o teoremă cu privire la minimul variației dispersiei, și anume

$$M(\bar{\theta} - \theta)^2 \geqslant \frac{(1 + \alpha')^2}{n \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta}\right]^2 f(x, \theta)\, dx}.$$

De această dată minimul se referă la valoarea medie a pătratului abaterii θ față de $\bar{\theta}$. Se vede că dacă $\alpha' = 0$, atunci sîntem în cazul funcțiilor de estimație absolut corecte.

Funcția de estimație $\bar{\theta}(x)$ pentru care minimul este atins poartă numele de funcție de *estimație suficientă*. Din definiție rezultă că orice funcție de estimație eficientă este și suficientă.

Să vedem acum ce legături există între o funcție de estimație eficientă și o funcție de estimație suficientă. Am stabilit mai înainte că, pentru ca să existe o funcție de estimație eficientă trebuie ca

$$\ln f(x, \theta) = A'(\theta)[L(x) + \theta] + A(\theta) + N(x).$$

Fie $f(x, \theta)$ o funcție care nu poate fi scrisă sub forma de mai sus și să vedem dacă făcînd o schimbare de variabile $\theta = h(\nu)$ familia de densități $f(x; h(\nu))$ poate să admită o funcție de estimație eficientă. Pentru aceasta trebuie să avem

$$ln\, f(x, h(\nu)) = A'(\nu)[L(x) - \nu] + A(\nu) + N(x);$$

cum însă $\nu = h^{-1}(\theta)$, obținem

$$ln\, f(x, \theta) = A_1(\theta)\psi_1(x) + A_0(\theta) + \psi_0(x), \tag{5}$$

unde

$$A_1(\theta) = A'(\nu), \quad \psi_1(x) = L(x),$$
$$A_0(\theta) = A(\nu) - \nu A'(\nu), \quad \psi_0(x) = N(x).$$

Rezultă imediat că

$$\nu = -\frac{A_0'(\theta)}{A_1'(\theta)}.$$

Relația (5) arată existența unei statistici exhaustive*, ajungîndu-se la o

* Fie $\bar{\theta}(x) = c_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $m < n$, m hipersuprafețe în R_n; densitatea de repartiție a punctului $(x_1, \ldots, x_n)$ este $\prod_{j=1}^{n} f(x_j, \theta)$. Dacă probabilitatea condiționată a acestui punct, după ce știm că avem $\bar{\theta}(x) = c_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, nu depinde de θ și $m < n$ este cel mai mic număr pentru care această proprietate este adevărată, funcțiile $\bar{\theta}(x) = c_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, constituie o *statistică exhaustivă de ordinul m*.

funcție de estimație eficientă a lui ν, funcție dată de

$$\overline{\theta}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} L(x_i)}{n}$$

care constituie o statistică exhaustivă a familiei $f(x, \theta)$.

Din relația $\nu = h^{-1}(\theta)$ rezultă o funcție de estimație a lui θ, care nu mai este eficientă și pe care o numim suficientă. Deci $\overline{\theta}(x)$ ne dă o funcție de estimație eficientă pentru ν și o funcție de estimație suficientă pentru θ.

4. Metoda verosimilității maxime

Fie

$$Q(x, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$$

densitatea de repartiție corespunzătoare punctului $(x_1, \ldots, x_n)$ Rn. Cum valorile $(x_1, \ldots, x_n)$ sînt date de experiență, vom presupune că valoarea cea mai verosimilă pentru θ este dată de valoarea pentru care $Q(x, \theta)$ este maximă. Fie θ^* această valoare; ea depinde de $x_1, \ldots, x_n$, cu alte cuvinte

$$\theta^* = \theta^*(x_1, \ldots, x_n) = \theta^*(x).$$

Vom numi aceste funcții, funcții de verosimilitate maximă.

Maximul lui $Q(x, \theta)$ are loc în același timp cu maximul lui $\ln Q(x, \theta)$. Deci funcția de estimație de verosimilitate maximă trebuie să verifice ecuația

$$\frac{\partial \ln Q(x, \theta)}{\partial \theta} = \sum_i \frac{\partial \ln f(x_i, \theta)}{\partial \theta} = 0.$$

Aplicația 1. Să considerăm selecția dintr-o mulțime în care caracteristica f poate să ia valorile 0 și 1 cu probabilitățile p și q. În acest caz, se vede cu ușurință că repartiția poate fi scrisă sub forma

$$p^x q^{1-x}$$

unde $x = 0,1$. Dacă selecția dă valorile $x_1, \ldots, x_n$ pentru variabila f, atunci funcția de verosimilitate maximă este dată de

$$Q(x, p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} q^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} q^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i} = p^y q^{n-y}$$

unde am notat

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Avem

$$ln\, Q(x,\, p) = y \log p + (n - y)\, ln\, q = y\, ln\, p + (n - y)\, ln\, (1 - p).$$

Derivînd în raport cu p, obținem

$$\frac{\partial ln\, Q\,(x,\, p)}{\partial p} = \frac{y}{p} - \frac{n - y}{1 - p}.$$

Cum însă

$$\frac{\partial ln\, Q\,(x,\, p)}{\partial p} = 0,$$

rezultă că

$$\frac{y}{p} - \frac{n - y}{1 - p} = 0,$$

de unde rezultă că

$$\overline{p} = \frac{y}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x},$$

adică cea mai bună estimație a parametrului p dată de metoda verosimilității maxime este media aritmetică.

Aplicația 2. Să presupunem că vrem să estimăm parametrul λ din repartiția Poisson $P\,(x;\, \lambda)$, folosind selecția dată de valorile $x_1, \ldots, x_n$.

Avem

$$Q\,(x,\, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\lambda}\, \lambda^{y}}{x_1! \ldots x_n!},$$

unde am notat

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Atunci

$$ln\, Q(x,\, \lambda) = -\, n\, \lambda + y\, ln\, \lambda - \sum_{i=1}^{n} ln\,(x_i!).$$

Derivînd în raport cu λ, avem

$$\frac{\partial ln\, Q\,(x,\, \lambda)}{\partial \lambda} = -\, n + \frac{y}{\lambda}$$

de unde

$$\frac{y}{\lambda} = n$$

sau

$$\bar{\lambda} = \frac{y}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}.$$

Deci și în acest caz cea mai bună estimație pentru parametrul λ este media aritmetică.

Vom stabili acum cîteva rezultate utilizînd metoda verosimilității maxime.

Teorema 3. *Dacă există o funcție de estimație eficientă* $\bar{\theta}(x)$, *ea este dată de funcția de estimație de verosimilitate maximă* $\theta^*(x)$.

Demonstrație. Dacă există o funcție de estimație eficientă, atunci trebuie ca

$$ln\, f(x, \theta) = A'(\theta)\,[L(x) - \theta] + A(\theta) + N(x),$$

$$\bar{\theta}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (Lx_i)}{n}.$$

Derivînd în raport cu θ și ținînd seamă că expresia $\frac{\partial ln\, f(x, \theta)}{\partial \theta}$ trebuie să fie egală cu zero, avem

$$A''(\theta^*) \sum_{i=1}^{n} [L(x_i) - \theta^*] = 0.$$

Singura soluție, funcție de $x_1, \ldots, x_n$ este

$$\theta^*(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} L(x_i)}{n}$$

care coincide cu funcția de estimație eficientă $\bar{\theta}(x)$.

Teorema 4. *Dacă există o funcție de estimație suficientă* θ_1, *orice soluție a ecuației verosimilității maxime este funcție de* θ_1.

Demonstrație. În acest caz, am văzut că

$$\ln f(x, \theta) = A_1(\theta)\,\psi(x) + A_0(\theta) + \psi_0(x),$$

iar statistica exhaustivă este dată de

$$\theta_1(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i).$$

Din ecuația verosimilității maxime, obținem

$$A_i'(\theta)\,\psi(x) + A_0'(\theta) = 0,$$

de unde rezultă că

$$\sum_{i=1}^{n} \psi(x_i) = -\frac{A_0'(\theta^*)}{A_0'(\theta)} \cdot n$$

sau

$$\theta^* = F\left(\sum_{i=1}^{n} \psi(x_i)\right) = F(\theta_1)$$

și cu aceasta teorema este demonstrată.

Vom introduce acum noțiunea de funcție de estimație *asimptotic eficientă*. Fie $\overline{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ o funcție de estimație corectă a lui θ, astfel încît să avem

$$D(\overline{\theta}) \frac{a}{\sqrt{n}},$$

cu alte cuvinte ca abaterea medie pătratică a lui $\overline{\theta}$ să fie asimptotică cu $\frac{a}{\sqrt{n}}$, unde a este o constantă. Dacă ținem seama de definiția eficienței dată de punctul 2, atunci în acest caz avem

$$\lim_{n\to\infty} e(\overline{\theta}) = \frac{1}{a^2 M\left[\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial \theta}\right]^2}.$$

Această expresie poartă numele de *eficiență asimptotică* pentru $\overline{\theta}$.

Dacă eficiența asimptotică este egală cu 1, vom spune că *este o funcție de estimație asimptotic eficientă.*

Vom stabili acum o teoremă care ne permite să stabilim în ce condiții repartiția lui $\sqrt{n}(\theta^* - \theta)$, unde θ^* este o soluție a ecuației verosimilității maxime, converge către repartiția normală, cînd $n \to \infty$.

Teorema 5. *Fie* $\theta^* = \theta(x_1, \ldots, x_n)$ *o soluție a ecuației verosimilității maxime. Dacă*

(a) $\frac{1}{n}\left[\frac{\partial^2 \ln Q(x,\theta)}{\partial \theta^2}\right]_{\theta=\theta^*}$ *converge în probabilitate către* A *(finit);*

(b) $\frac{1}{n}\left[\frac{\partial^3 \ln Q}{\partial \theta^3}\right]_{\theta=\theta^*}$ *converge în probabilitate către* B *(finit);*

(c) *repartiția variabilei* $\sqrt{n}(\theta^* - \theta^*)$ *tinde către o repartiție nedegenerată cînd* $n \to \infty$, *atunci repartiția variabilei* $\sqrt{n}(\theta - \theta)$ *tinde către o repartiție normală, cînd* $n \to \infty$.

Demonstrație. Să notăm

$$X_i = \frac{\partial \ln f(x_i, \theta)}{\partial \theta}.$$

Atunci putem scrie că

$$\frac{\partial \ln Q(x, \theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f(x_i, \theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Să observăm că

$$M(X_i) = M\left(\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta}\right) = \int_R \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} dx = 0.$$

Să presupunem că

$$D^2(X_i) = \int_R \left[\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta}\right]^2 \cdot dx = h^2,$$

unde h este un număr finit, diferit de zero.

În aceste condiții am văzut, cînd am studiat teoremele limită că

$$\lim_{h \to \infty} P\left(\frac{1}{h\sqrt{n}} \cdot \frac{\partial \ln Q}{\partial \theta} < a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Însă, dezvoltînd în serie, avem

$$\frac{1}{h\sqrt{n}} \cdot \frac{\partial \ln Q}{\partial \theta} = \frac{1}{h\sqrt{n}} \left[\frac{\partial \ln Q}{\partial \theta}\right]_{\theta=\theta^*} + \frac{1}{h\sqrt{n}} (\theta - \theta^*) \left[\frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \theta^2}\right]_{\theta=\theta^*} +$$

$$+ \frac{1}{2h\sqrt{n}} (\theta - \theta^*)^2 \left[\frac{\partial^3 \ln Q}{\partial \theta^3}\right]_{\theta=\theta_0},$$

unde

$$\theta_0 \in (\theta, \theta^*).$$

Însă din ecuația de verosimilitate rezultă că

$$\left[\frac{\partial \ln Q}{\partial \theta}\right]_{\theta=\theta^*} = 0.$$

Atunci putem scrie

$$\frac{1}{h\sqrt{n}} \frac{\partial \ln Q}{\partial \theta} = [-h\sqrt{n}(\theta - \theta^*)] + \frac{1}{h}\left[h^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{\partial \ln Q}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\theta^*}\right]\sqrt{n}(\theta - \theta^*) +$$

$$+ \frac{1}{2h\sqrt{n}} (\theta - \theta^*)^2 \left(\frac{\partial^3 \ln Q}{\partial \theta^3}\right)_{\theta=\theta_0}. \qquad (6)$$

Dacă primele două derivate ale funcției $f(x, \theta)$ există, atunci

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial \ln f}{\partial \theta} \cdot f$$

și, derivînd încă o dată în raport cu θ și ținînd seama de egalitatea de mai sus, rezultă următoarea identitate

$$f \cdot \frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2} + f\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

Integrînd, obținem

$$M\left[\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2}\right] + M\left[\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right]^2 = \int_R \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \cdot dx.$$

Cum însă

$$\int_R f(x, \theta)\, dx = 1,$$

derivînd egalitatea de mai sus de două ori în raport cu θ rezultă

$$\int_R \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\, dx = 0$$

și deci

$$M\left[\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2}\right] = -M\left[\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right]^2 = -h^2$$

și

$$M\left[h^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\theta^*}\right] = 0.$$

Să notăm

$$-h\sqrt{n}\,(\theta - \theta^*) = X,$$

$$\frac{1}{h}\left[h^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\theta^*}\right] = Y,$$

$$\frac{1}{2h\sqrt{n}}(\theta - \theta^*)\left(\frac{\partial^3 \ln Q}{\partial \theta^3}\right)_{\theta=\theta^*} = Z.$$

Din cele de mai sus rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{h\sqrt{n}} \cdot \frac{\partial \ln Q}{\partial \theta} < a\right) = \lim_{n\to\infty} P(X + Y + Z < a).$$

În sfîrșit, din (6) rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} P(h\sqrt{n}\,(\theta^* - \theta) < a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Cu aceasta teorema este demonstrată.

5. Intervale de încredere pentru estimarea mediei și dispersiei unei repartiții normale

Din metodele expuse, rezultă că putem estima un parametru numai aproximativ. Aceasta înseamnă că se poate stabili un interval care să acopere parametrul estimat, cu o probabilitate dată.

Să presupunem că vrem să estimăm parametrul m care intervine în repartiția normală, presupunînd că σ este cunoscut. Se știe că

$$\rho(x\,;\,m,\,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\, e^{\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,.$$

Parametrul m îl vom estima cu ajutorul mediei aritmetice, care se calculează pe baza datelor.

Știm însă că variabila aleatoare

$$V = \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

urmează o repartiție a cărei densitate de repartiție este dată de

$$\rho(u;\,0,\,1) = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{u^2}{2}}$$

și deci se poate determina probabilitatea ca variațiile să fie situate într-un interval dat. Putem scrie

$$P(\alpha < V < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(u;\,0,\,1)\,du = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \gamma.$$

Probabilitatea γ se numește *probabilitate de încredere*. Putem scrie

$$P\left(\alpha < \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \beta\right) = P\left(\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} - m < \beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Intervalul $\left(m + \alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\; m + \beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ are proprietatea că variabila $\bar{x}$ nimerește în el cu o probabilitate dată. Putem numi acest interval domeniul valorilor practice posibile ale lui $\bar{x}$ pentru u un m dat.

Să observăm că

$$P\left(\bar{x} - \beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} - \alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Să considerăm intervalul

$$I\left(\bar{x} - \beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\;\; \bar{x} - \alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Acesta este intervalul de încredere. Dacă $\alpha = -\beta$, lungimea intervalului este dată de

$$2\beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

și depinde de probabilitatea de încredere γ, de σ și de volumul n al selecției.

Măsura siguranței, legată de intervalul de încredere $I\left(\bar{x} - \beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} - \right.$ $\left. - \alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, este o probabilitate dată înainte de efectuarea selecției și care nu ia în considerație datele concrete obținute din experiență.

Să estimăm acum parametrul σ^2 al unei legi normale. Va trebui, deci, să găsim o funcție care să depindă de datele selecției și de parametrul estimat. Pentru aceasta vom folosi dispersele de selecție s^2.

Să presupunem că variabila aleatoare ξ admite densitatea de repartiție normală $\rho(x; m, \sigma)$.

Să ne ocupăm de expresia lui s^2. Avem

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(x_i - m) - (\bar{x} - m)]^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 - (\bar{x} - m)^2.$$

Împărțind cu $\frac{\sigma^2}{n}$, obținem

$$\frac{n \cdot s^2}{\sigma^2} + \left(\frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - m}{\sigma}\right)^2.$$

Să notăm cei trei termeni ai egalității de mai sus, respectiv, cu A, B, C, iar funcția generatoare a momentelor corespunzătoare cu

$$g_{A+B}(t) = g_C(t).$$

Se poate demonstra că, în cazul nostru, $\bar{x}$ și s^2 sînt variabile aleatoare independente; atunci

$$g_A(t) \cdot g_B(t) = g_C(t).$$

Cum însă C este suma pătratelor a n variabile aleatoare care urmează repartiția normală, rezultă că va urma o repartiție χ^2 cu n grade de libertate și deci variabila C va avea ca funcție generatoare a momentelor funcția generatoare a repartiției χ^2.

Am văzut însă că funcția caracteristică a repartiției χ^2 este dată de

$$\varphi_{\chi^2}(t) = (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}$$

și deci

$$g_C(t) = (1 - 2t)^{-\frac{n}{2}}.$$

Să observăm că

$$g_B(t) = (1 - 2t)^{-\frac{1}{2}}.$$

Rezultă că

$$g_A(t) = \frac{(1 - 2t)^{-\frac{n}{2}}}{(1 - 2t)^{-\frac{1}{2}}} = (1 - 2t)^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Cu alte cuvinte, am stabilit că dacă selecția se ia dintr-o colectivitate normală cu densitatea de repartiție $\rho(x, m; \sigma)$, atunci variabila

$$A = \frac{ns^2}{\sigma^2}$$

urmează o repartiție χ^2 cu $n - 1$ grade de libertate.

Pornind de la densitatea de repartiție a lui χ^2, putem stabili cu ușurință densitatea de repartiție corespunzătoare variabilei

$$s^2 = \frac{\sigma^2}{n} A;$$

făcînd schimbarea de variabilă $x = \frac{n}{\sigma^2} x$, obținem, ținînd seamă că $n - 1 = k$,

$$\rho_{s^2}(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}} \left(\frac{n}{\sigma^2} x\right)^{\frac{n-1}{2} - 1} \cdot e^{-\frac{nx}{2\sigma^2}} \cdot \frac{n}{\sigma^2} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot x^{\frac{n-3}{2}} \cdot e^{-\frac{nx}{2\sigma^2}}.$$

Momentele corespunzătoare acestei densități de repartiție se calculează cu ușurință.

Obținem

$$M(A) = n - 1, \quad D^2(A) = 2(n - 1)$$

și deci

$$M(s^2) = \frac{\sigma^2}{n} M(A) = \frac{n-1}{n} \sigma^2,$$

iar

$$D(s^2) = \frac{\sigma^4}{n^2};\ D^2(A) = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4.$$

Am văzut însă că dependența lui A de σ^2 este monotonă și continuă și deci $A = \frac{nS^2}{\sigma^2}$ poate fi folosit pentru construirea intervalelor de încredere în vederea estimării lui σ^2.

Să presupunem că $\gamma = 0{,}95$. Din tabela pentru $n-1$ grade de libertate obținem două valori pentru χ^2. Din repartiția pe care o urmează variabila A, rezultă că

$$P\left(\chi_1^2 < \frac{ns^2}{\sigma^2} < \chi_2^2\right) = 0{,}95.$$

Se vede că cu aceeași probabilitate ne putem aștepta ca

$$\frac{ns^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{\chi_1^2}.$$

Constantele ns^2/χ_2^2 și ns^2/χ_1^2 determină limitele de încredere pentru σ^2.

Să observăm că din aceste relații se pot determina în mod analog limitele de încredere pentru estimarea parametrului σ.

6. Intervale de încredere pentru estimarea mediei unei colectivități cu ajutorul repartiției t

Am văzut cum putem estima media m a unei colectivități normale în cazul în care σ este cunoscut. Am folosit, în acest caz, variabila

$$u = \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Dacă utilizăm însă în loc de σ pe s, obținem variabila

$$t = \frac{\bar{x} - m}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}},$$

care se mai poate scrie

$$t = \frac{\bar{x} - m}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} = \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\frac{\sqrt{n}\,s}{\sigma}} \sqrt{n-1} = \frac{Z\sqrt{n-1}}{V}.$$

unde $Z = \frac{\bar{x} - m}{\sigma}\sqrt{n}$ urmează o repartiție normală $N(0,1)$, iar $V^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2}$ este chiar variabila A, care am văzut că urmează o repartiție $H(x; n-1)$. Rezultă deci că variabila t urmează o repartiție $S(x; n-1)$.

În aplicație o mare utilizare o au probabilitățile

$$\frac{q}{100} = 1 - 2\int_0^t s(x; n-1)\,dx,$$

unde $s(x; n-1)$ este densitatea de repartiție a repartiției student cu $n-1$ grade de libertate.

O largă aplicație o au și limitele q- procentuale ale lui t, adică acelea care se bucură de proprietatea că pentru $t_{q,n-1} > 0$ rămîn în afara intervalului $(-t_{q,n-1}, t_{q,n-1})$ sau pentru care

$$P(|t| > t_{q,n-1}) = \frac{q}{100} = \int_{-\infty}^{-t_{q,n-1}} s(x; n-1)\,dx + \int_{t_{q,n-1}}^{\infty} s(x; n-1)\,dx =$$

$$= 2\int_{t_{q,n-1}}^{\infty} s(x; n-1)\,dx = 2\left(1 - \int_{-\infty}^{t_{q,n-1}} s(x; n-1)\,dx\right) =$$

$$= 2(1 - S(t_{q,n-1}; n-1)).$$

Evident că

$$P(-t_{q,n-1} < t < t_{q,n-1}) = 2S(t_{q,n-1}; n-1) - 1 = 1 - Q = P. \quad (7)$$

Să trecem acum la estimarea parametrului m. Inegalitatea

$$\left|\frac{\bar{x} - m}{\bar{s}} - \sqrt{n-1}\right| < t_{q,n-1}$$

este echivalentă cu

$$-\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}}\,t_{q,n-1} < x - m < \frac{\bar{s}}{\sqrt{n}}\,t_{q,n-1}$$

sau

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}}\,t_{q,n-1} < m < \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}}\,t_{q,n-1}.$$

Această inegalitate are loc, după cum am văzut în (7), cu probabilitatea

$$P = 2S(t_{q,n-1}; n-1) - 1 = 1 - Q = 1 - \frac{q}{100} = \frac{100 - q}{100}.$$

Intervalul

$$I\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n-1}}\,t_{q,n-1},\ \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n-1}}\,t_{q,n-1}\right)$$

constituie intervalul de încredere pentru estimarea mediei unei colectivități, și care este cel mai scurt interval pentru aceeași probabilitate P.

Scanned with OKEN Scanner

7. Intervale de încredere pentru selecții mari

Am văzut mai sus cum se pot construi intervale de încredere pentru orice selecție. În cele ce urmează vom arăta cum putem determina intervale de încredere pentru selecții mari, utilizînd funcția de verosimilitate maximă.

Fie $f(x, \theta)$ densitatea de repartiție a repartiției teoretice cu un singur parametru θ și

$$Q = f(x_1, \theta) \dots f(x_n, \theta),$$

funcția de verosimilitate maximă, unde $x_1, \dots, x_n$ sînt variabilele de selecție.

Teorema 6. *Dacă*

$$M\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x, \theta)\right] = 0$$

și dacă expresia

$$D = M\left(\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x\ \theta)\right]^2\right)$$

este finită, repartiția variabilei aleatoare

$$\frac{1}{\sqrt{nD}} \frac{\partial}{\partial\theta} \ln Q$$

tinde către repartiția normală $N(0, 1)$, *pentru* $n \to \infty$.

Demonstrație. Avem

$$\frac{\partial \ln Q}{\partial\theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f(x_i, \theta)}{\partial\theta} = \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

unde am notat

$$y_i = \frac{\partial \ln f(x_i, \theta)}{\partial\theta}.$$

Dacă punem

$$y = \frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial\theta},$$

care este o variabilă aleatoare, rezultă că

$$M(y) = \int_R \frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial\theta} f(x, \theta)\, dx = \int_R \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial\theta} = 0,$$

deoarece dacă presupunem că derivarea sub integrala de mai jos este posibilă, din

$$\int_R f(x, \theta)\, dx = 1$$

deducem

$$\int_R \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} = 0.$$

Din enunțul teoremei rezultă că

$$D^2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta}\right]^2 f(x, \theta)\, dx$$

este finită și diferită de zero. Atunci

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M(y_i) = 0$$

și

$$M\left[\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} M(y_i^2) + 2\sum_{i \neq j} M(y_i)\, M(y_j) = nD^2.$$

Însă din teorema lui Leapunov, putem să scriem

$$\lim_{n \to \infty} P\left(-a \leqslant \frac{y_1 + \ldots + y_n}{D\sqrt{n}} \leqslant a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

adică, pentru valori mari ale lui n, putem spune că

$$\frac{y_1 + \ldots + y_n}{\sqrt{n}D} = \frac{1}{\sqrt{n}D} \frac{\partial \ln Q}{\partial \theta},$$

urmează o repartiție normală $N(0, 1)$, dacă dispersia este finită și diferită de zero. Cu aceasta teorema este demonstrată.

Dacă mai presupunem că

$$\frac{1}{\sqrt{n}D} \frac{\partial \ln P}{\partial \theta}$$

este monoton crescătoare, ca și în celelalte cazuri se poate construi intervalul de încredere pentru parametrul θ.

Aplicația 1. Să presupunem că sîntem în cazul legii normale cu dispersia cunoscută σ și că vrem să estimăm parametrul m. În acest caz $\theta = m$, iar

$$\ln f(x, \theta) = -\frac{1}{2} \frac{(x - m)^2}{\sigma^2},$$

$$y = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x, \theta) = \frac{x - m}{\sigma^2}$$

și deci

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln Q = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma^2} - \frac{nm}{\sigma^2},$$

de unde rezultă că

$$M(y) = 0, \qquad D^2(y) = \frac{1}{\sigma^2}$$

și deci

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial 0} \ln Q = \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

și obținem intervalul de încredere

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

unde t_γ este astfel ales, încît

$$2\Phi(t_\gamma) = \gamma.$$

Aplicația 2. Să presupunem că vrem să determinăm intervalul de încredere pentru parametrul necunoscut λ, al unei repartiții Poisson, a cărei densitate de repartiție este dată de

$$f(x, \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}; \quad x = 0, 1, \ldots$$

În acest caz variabila aleatoare y este

$$\frac{\partial \ln f(x, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{x}{\lambda} - 1,$$

iar

$$D^2 = \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda} - 1\right)^2 \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{1}{\lambda}.$$

Atunci

$$\frac{y_1 + \ldots + y_n}{\sqrt{n} D} = \frac{n\left(\frac{\bar{x}}{\lambda} - 1\right)\sqrt{\lambda}}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

și deci

$$\lim_{n \to \infty} P\left(-a \leqslant \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leqslant a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

ceea ce este echivalent cu

$$P(\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

unde am notat cu λ_1 și λ_2 rădăcinile ecuației

$$n\lambda^2 - (2n\bar{x} + a^2)\lambda + n\bar{x}^2 = 0.$$

Am determinat astfel intervalul de încredere.

Intervalele de încredere obținute sînt, într-un anumit sens, mai mici decît cele construite prin alte metode.

§ 6. Verificarea ipotezelor

1. Considerații generale

O problemă importantă a statisticii matematice, strîns legată de problema selecției și a estimației, o constituie verificarea ipotezelor. Vom numi *ipoteza statistică* orice presupunere cu privire la repartițiile colectivității considerate. Făcînd diverse ipoteze, vom verifica în ce măsură ele sînt în concordanță cu datele experienței. Vom studia comportarea unor caracteristici statistice pe care le vom calcula cu ajutorul datelor unei selecții. Aceste caracteristici le numim criterii de verificare.

Fie $x_1, \ldots, x_n$ o selecție de volum, pe care o considerăm ca un punct $x = (x_1, \ldots, x_n)$ în R_n și B o mulțime boreliană din R_n. Ipoteza pe care vrem să o verificăm este

$$H_0 : \alpha \in B.$$

Dacă există o regiune U, numită regiune critică, astfel încît

$$P(x \in U; \quad \alpha \in B) = \delta,$$

unde δ este un număr ales de noi și foarte apropiat de zero, respingem ipoteza H_0 cînd în urma unei selecții efectuate punctul x cade în U și admitem ipoteza H_0 cînd x cade în afara lui U.

Se observă strînsa legătură cu metoda intervalelor de încredere. Deosebirea esențială constă în faptul că la verificarea ipotezelor se folosește probabilitatea referitoare la un domeniu din spațiul selecțiilor, pe cînd la metoda domeniilor de încredere se folosesc probabilitățile regiunilor referitoare la un domeniu din spațiul parametrilor.

În cele ce urmează ne vom mărgini numai să abordăm cîteva probleme.

2. Utilizarea repartiției Snedecor la verificarea ipotezei cu privire la egalitatea dispersiilor

Fie f și g două variabile aleatoare normale și două selecții independente de volum n_f și, respectiv, n_g. Să verificăm ipoteza cu privire la egalitatea dispersiilor celor două variabile. Să notăm cu s_f^2 și s_g^2 dispersiile de selecție corespunzătoare. Variabilele aleatoare

$$\frac{n_f s_f^2}{\sigma_f^2} \quad \text{și} \quad \frac{n_g s_g^2}{\sigma_g^2}$$

urmează fiecare o repartiție χ^2 cu $K_1 = (n_f - 1)$, respectiv $k_2 = (n_g - 1)$ grade de libertate. În aceste condiții, se observă imediat că variabilele

$$\frac{U}{K_1} = \frac{n_f s_f^2}{(n_f - 1)\sigma_f^2},$$

$$\frac{V}{K_2} = \frac{n_g s_g^2}{(n_g - 1)\sigma_g^2}$$

satisfac condițiile impuse variabilelor care intervin în repartiția Snedecor.

Din faptul că $\sigma_f = \sigma_g$, avem

$$F = \frac{\frac{n_f}{n_f - 1} s_f^2}{\frac{n_g}{n_g - 1} s_g^2} = \frac{\tilde{s}_f^2}{\tilde{s}_g^2}$$

unde am notat cu $\tilde{s}_f^2$ și $\tilde{s}_g^2$ estimații absolut corecte ale dispersiilor variabilelor f și g. Evident că variabila aleatoare F urmează o repartiție Snedecor cu K_1, respectiv K_2 grade de libertate.

În scopul verificării ipotezei $\sigma_f^2 = \sigma_g^2$ este necesar să construim domeniul critic al criteriului. Pentru aceasta vom lua două intervale: (a) intervalul care verifică inegalitatea $F > F_2$ sau, cum se mai numește, intervalul valorilor mai mari ale lui F, și (b) intervalul $0 < F < F_1$ sau intervalul valorilor mai mici ale lui F. Se aleg punctele critice F_1 și F_2, astfel încît pentru un prag de semnificație egal cu α să avem

$$P(F > F_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{și} \quad P(F < F_1) = \frac{\alpha}{2}.$$

Dacă valoarea lui F obținută din selecție se află în afara intervalului $[F_1, F_2]$, atunci ipoteza cu privire la egalitatea dispersiilor trebuie respinsă.

După cum se vede, acest criteriu de verificare a ipotezelor este foarte sensibil.

3. Criteriul χ^2

Să presupunem că sîntem în cazul unei selecții de volum suficient de mare și că vrem să examinăm cazul în care putem verifica ipoteza cu privire la concordanța dintre repartiția teoretică și cea de selecție. Vom studia un caz particular, care se poate generaliza cu destulă ușurință, și anume cazul în care variabila aleatoare poate lua numai două valori, iar datele de observație se împart în două grupe, S_1 și S_2, distincte. Să admitem că ipoteza pe care o verificăm determină unic probabilitățile p_1 și p_2 ale fiecăreia dintre cele două valori. Avem

$$p_1 + p_2 = 1, \quad 0 \leqslant p_1 < 1, \quad 0 \leqslant p_2 < 1.$$

Să notăm cu n numărul de observații și cu ν_1, respectiv ν_2, numărul de observații care aparțin lui S_1, respectiv S_2. Avem

$$\nu_1 + \nu_2 = n.$$

Problema noastră constă în estimarea apropierii dintre probabilitățile p_1 și p_2 admise prin ipoteză și frecvențele grupelor S_1 și S_2 care sînt date de

$$\frac{\nu_1}{n} \quad \text{și} \quad \frac{\nu_2}{n}.$$

Ca măsură a abaterii să luăm suma ponderată a pătratelor abaterilor ν_1 și ν_2 de la valorile lor medii np_1 și np_2

$$x^2 = \frac{(\nu_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(\nu_2 - np_2)^2}{np_2}$$

care are ca ponderi inversele valorilor medii. Să observăm mai întîi că abaterile

$$x_1 = \nu_1 - np_1 \text{ și } x_2 = \nu_2 - np_2$$

nu sînt variabile independente. Într-adevăr

$$x_1 + x_2 = \nu_1 + \nu_2 - n(p_1 + p_2).$$

Cum însă $\nu_1 + \nu_2 = n$, iar $p_1 + p_2 = 1$, avem

$$x_1 + x_2 = 0$$

sau

$$x_1 = -x_2.$$

Să vedem acum ce relații există între abaterile ponderate; avem

$$z_1 = \frac{x_1}{\sqrt{np_1}} = \frac{\nu_1 - np_1}{\sqrt{np_1}},$$

$$z_2 = \frac{x_2}{\sqrt{np_2}} = \frac{\nu_2 - np_2}{\sqrt{np_2}},$$

de unde rezultă că

$$z_1\sqrt{np_1} + z_2\sqrt{np_2} = 0.$$

Ținînd seama de acestea, putem scrie că

$$x^2 = z_1^2 + z_2^2 = \frac{x_1^2}{np_1} + \frac{x_2^2}{np_2} = \frac{x_1^2}{np_1p_2} = \left(\frac{\nu_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)^2.$$

Știm însă că o variabilă aleatoare normată pentru u suficient de mare urmează aproximativ o repartiție normală și deci x^2 urmează o repartiție χ^2 cu un singur grad de libertate. Acestea ne permit să determinăm, pentru un prag de semnificație dat, domeniul critic pentru verificarea ipotezei de concordanță.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă, de exemplu, presupunem că valorile lui χ^2 care depășesc 1% $\chi^2_{0,01}$ sînt practic imposibile, dacă ipoteza noastră este adevărată, atunci va trebui să o respingem dacă valoarea lui χ^2 calculată cu ajutorul datelor de selecție este mai mare ca $\chi^2_{0,01}$.

Să generalizăm acum cazul tratat mai înainte. Să presupunem că avem r grupe distincte $S_1 \ldots S_r$ de valori posibile ale caracteristicii considerate. Ipoteza admisă ne permite să determinăm valorile probabilităților $p_1, \ldots, p_r \left(\sum_{i=1}^{r} p_i = 1\right)$, astfel încît valorile să aparțină grupelor respective $S_1, \ldots, S_r$. Fie $\nu_1, \ldots, \nu_r$ numărul observațiilor din grupele respective.

Pentru a estima concordanța respectivă prin datele experienței, vom folosi variabila

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{r} \frac{x_i^2}{np_i},$$

unde am notat $x_i = \nu_i - np_i$. Se poate verifica imediat că abaterile x_i verifică relația liniară $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

În acest caz numerele ν_i vor avea o repartiție multinomială, adică

$$P_{n,m_1,\ldots,m_r} = \frac{n!}{m_1! \ldots m_r!} p_1^{m_1} \ldots p_r^{m_r},$$

unde $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$; se poate arăta că abaterile normale

$$z_1 = \frac{x_1}{\sqrt{np_1}}; \quad z_2 \frac{x_2}{\sqrt{np_2}}; \quad \ldots \; z_r = \frac{x_r}{\sqrt{np_r}}$$

urmează la limită o repartiție normală $(r-1)$-dimensională, deci variabilă

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} z_i^2$$

urmează aproximativ, în aceste condiții, o repartiție χ^2 cu $r-1$ grade de libertate. De aici rezultă că putem construi domeniul critic $\chi^2 > \chi_q^2$, astfel încît probabilitatea apartenenței la acest domeniu este egală, în ipoteza noastră, în pragul de semnificație dat q. Dacă alegem pe q în mod convenabil un astfel de eveniment poate fi considerat, practic, imposibil.

4. Teoremele lui Glivenko și Kolmogorov

În statistica matematică, o problemă centrală o constituie condițiile în care putem afirma că repartiția de selecție $F_n^*(x)$ converge către repartiția teoretică $F(x)$ a variabilei ξ considerate. Presupunînd că în n probe posibile, independente, obținem valorile

$$x_1, \ldots, x_n,$$

Scanned with OKEN Scanner

știm că (§, 1)

$$F_n^*(x) = \frac{\nu_n(x)}{n},$$

unde $\nu_n(x)$ este numărul valorilor din șirul $x_1, \ldots, x_n$ mai mici decît x.

Vom demonstra o teoremă datorită lui V.I. Glivenko, care stabilește în ce condiții $F_n^*(x)$ converge către $F(x) = P(\xi < x)$; anume, are loc

Teorema 1. *Dacă repartiția teoretică $F(x)$ a unei variabile este continuă și dacă notăm cu*

$$d_n = \sup_{x \in R} |F(x)_n^* - F(x)|$$

distanța dintre $F(x)$ și repartiția de selecție $F_n^*(x)$, atunci d_n converge aproape sigur către zero, cînd $n \to \infty$

Demonstrație. Să notăm cu $x_{r,k}$ cel mai mic x care satisface inegalitatea

$$F(x-0) = F(x) \leqslant \frac{k}{r} \leqslant F(x+0), \qquad k = 1, \ldots, r.$$

Fie

$$A = \{\omega;\ \zeta(\omega) < x_{r,k}\};$$

evident că

$$P(A) = F(x_{r,k}).$$

Însă frecvența apariției evenimentului A este egală cu $F_n^*(x_{r,k})$ și după teorema numerelor mari, avem

$$P(F_n^*(x_r, k) \to F(x_{r,k})) = 1. \tag{1}$$

Să notăm acum cu E_k^r evenimentul care constă în faptul că pentru $n \to \infty$,

$$F_n^*(x_{r,k}) \to F(x_{r,k});\ k = 1, \ldots, r$$

și

$$E^r = E_1^r \cap \ldots \cap E_r^r.$$

Se observă că evenimentul E^r este echivalent cu faptul că, pentru $n \to \infty$

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant r} |F_n^*(x_{r,k}) - F(x_{r,k})| \to 0.$$

După (1), avem

$$P(E_1^r) = P(E_2^r) = \ldots = P(E_r^r) = 1$$

și în virtutea propoziției 2, de mai jos, deducem

$$P(E^r) = 1.$$

Fie acum

$$E = \bigcap_{n \in N^*} E^n.$$

După aceeași propoziție

$$P(E) = 1.$$

Să notăm acum cu S evenimentul caracterizat prin faptul că

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in R} |F_n^*(x) - F(x)| = 0.$$

Fie $x_{r,k} < x < x_{r,k+1}$. Atunci, avem

$$F_n^*(x_{r,k+0}) \leqslant F_n^*(x) \leqslant F_n^*(x_{r,k+1})$$

și

$$F(x_{r,k+0}) \leqslant F(x) \leqslant F(x_{r,k+1}),$$

iar

$$0 \leqslant F(x_{r,k+1}) - F(x_{r,k+0}) \leqslant \frac{1}{r}.$$

De aici rezultă că

$$|F_n^*(x) - F(x)| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant r} |F_n^*(x_{r,k}) - F(x_{r,k})| + \frac{1}{r}$$

și deci

$$\sup_{x \in R} |F_n^*(x) - F(x)| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant r} |F^*(x_{r,k}) - F(x_{r,k})| + \frac{1}{r}.$$

Cum r este arbitrar, din ultima inegalitate rezultă că $E \subset S$; am arătat deci că

$$P(\sup_{x \in R} |F_n^*(x) - F(x)| \to 0) = 1,$$

cu alte cuvinte am demonstrat că d_n converge aproape sigur către zero.

Se poate demonstra și următoarea teoremă, datorită lui A.N. Kolmogorov:

Teorema 2. *Dacă funcția $F(x)$ este continuă, atunci*

$$\lim_{n \to \infty} P(\sqrt{n} d_n < Z) = K(z) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } z \leqslant 0, \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2}, & \text{dacă } z > 0. \end{cases}$$

Această teoremă este foarte importantă pentru aplicații, constituind așa-numitul criteriu de concordanță al lui Kolmogorov. Cu alte cuvinte, ne permite să stabilim dacă rezultatele date de experiență coincid cu

ipoteza că variabila aleatoare considerată are o repartiție determinată. Fie $F(x)$ o funcție de repartiție continuă, și să presupunem că am obținut în urma observațiilor următoarele valori

$$x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n.$$

Să notăm cu $d_n(0)$ valoarea maximă a diferenței $|F_n^*(x) - F(x)|$.

Să punem

$$\lambda_0 = \sqrt{n}\, d_n(0).$$

Dacă diferența

$$1 - K(\lambda_0) = P(\sqrt{n}\, d_n \geqslant \lambda_0)$$

este mică, atunci sîntem în cazul unui eveniment puțin probabil, iar deosebirea dintre $F_n^*(x)$ și $F(x)$ trebuie considerată ca esențială. Dacă însă $1-K(\lambda_0)$ este mare, atunci ipoteza noastră poate fi considerată în concordanță cu datele furnizate de experiență.

Vom demonstra două leme, care intervin în demonstrarea teoremei lui Glivenko

Lema 1. *Fie E_n, $n \in N$ o infinitate de evenimente ale unui cîmp în relațiile $E_{n+1} \subset E_n$. Punînd*

$$E = \bigcap_{n \in N} E_n$$

avem

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} P(E_n).$$

Demonstrație: Avem

$$E_1 = (E_1 \cap \mathbf{C}E_2) \cup (E_2 \cap \mathbf{C}E_3) \cup \ldots \cup (E_{n-1} \cap \mathbf{C}E_n) \cup E_n$$

și

$$E_1 = (E_1 \cap \mathbf{C}E_2) \cup (E_2 \cap \mathbf{C}E_3) \cup \ldots \cup (E_{n-1} \cap \mathbf{C}E_n) \cup (E_n \cup \mathbf{C}E_{n+1}) \cup \ldots \cup E;$$

de unde rezultă că: $P(E) = P(E_n) - \sum_{k=n}^{\infty} P(E_k \cap \mathbf{C}E_{k-1})$.

Cum $\sum_{k=n}^{\infty} P(E_k \cap \mathbf{C}E_{k-1})$ este restul unei serii convergente, rezultă că

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} P(E_n)$$

Lema 2. *Dacă evenimentele $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ au toate probabilitatea 1, atunci*

$$P\left(\bigcap_{j \in N} E_j\right) = 1$$

Demonstrație: Să considerăm, mai întîi, un număr finit de evenimente. Știm că

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

și cum $P(E_1) = 1$, $P(E_2) = 1$ deci $P(E_1 \cap E_2) = 1$ vom avea

$$P(E_1 \cap E_2) = 1.$$

Presupunînd că proprietatea este adevărată pentru n evenimente, să arătăm că este verificată și pentru $n + 1$. Aceasta rezultă din egalitatea

$$P[(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) \cap E_{n+1}] = P(E_1 \cap E_2 \ldots \cap E_n) + P(E_{n+1}) - P[(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) \cap E_{n+1}].$$

Pentru cazul unei infinități de evenimente, să observăm că

$$E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \ldots = E_1 \cap (E_1 \cap E_2) \cap (E_1 \cap E_2 \cap E_3) \cap \ldots$$

și cum

$E_1 \cap E_2 \subset E_1$, $E \cap E_2 \cap E_3 \subset E_1 \cap E_2$, ... aplicînd lema 1, avem

$$P\left(\bigcap_{j \in N} E_j\right) = \lim_{n \to \infty} P\left(\bigcap_{j=1}^{n} E_j\right) = 1$$

deci lema este demonstrată în cazul general.

BIBLIOGRAFIE

Blanc-Lapierre, Fortet, R., *Théorie de s fonctions aléatoires*, Paris, 1953.
Ciucu, G. și Theodorescu, R., *Procese cu legături complete*, București, Ed. Acad. R.P.R., 1960.
Cramér, H., *Mathematical methods of statistics*, Princeton, 1946.
Doob, J. L., *Stochastic Processes*, New York, 1953.
Dunin-Barkovski, S. V. și Smirnov, *Teoria probabilităților și statistica matematică în tehnieă* (litografiat), București, 1956.
Feller, W., *Introduction to Probability theory and its application*, New York, 1950.
Fortet, R., *Calcul des Probabilités*, Paris, 1950.
Fréchet, M., *Recherches théoriques modernes. Traité du calcul des probabilites*, Paris, 1937.
Gnedenko, B., *Kurs teorii veroiatnostei*, Moskva, ed. II, 1954.
Halmos, P., *Teoriia merî*, Moskva, 1953.
Kai Lai Chung, *Markov Chains with stationary transition probabilities*, Berlin, 1960.
— *Lezioni di metodologia statistica per ricercatori*, Roma, 1961.
Loéve, M., *Probability Theory*, New York, 1955.
Marinescu, Gh., *Spații vectoriale normate*, București, Ed. Acad. R.P.R., 1956.
Onicescu, O., *Calculul probabilităților*, București, Ed. Tehnică, 1956.
Onicescu, O. și Mihoc, Gh., *Lecții de statistică matematică*, București, Ed. Tehnică, 1958.
Rényi, A., *Valószinűségszámitás*, Budapest, 1954.
Stoller, D., *Lezioni di ricerca operativa*, Roma, 1962.
Venţel, E. S., *Teoria veroiatnostei*, Moskva, 1958.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINSUL

Pag.

Capitolul I. *Cîmp de probabilitate* 3

§ 1. Cîmp de evenimente 3

1. Cîmpuri, probabilităţi 3
2. Probabilitate condiţionată 9
3. Evenimente independente 11
4. Entropia unui cîmp de evenimente 12

§ 2. Variabile aleatoare 17

1. Definiţii, proprietăţi 17
2. Variabile aleatoare simple 20

§ 3. Funcţia de repartiţie 21

1. Definiţii, proprietăţi 21
2. Densitate de repartiţie 24
3. Funcţia de repartiţie multidimensională 26
4. Variabile aleatoare independente 29
5. Funcţia de repartiţie condiţionată 30
6. Compunerea funcţiilor de repartiţie 33
7. Densitatea de repartiţie compusă 35
8. Mediană, cuantile, modă, asimetrie şi exces 37

§ 4. Şiruri de variabile aleatoare 41

1. Tipuri de convergenţă 41
2. Convergenţa în probabilitate 42
3. Compararea tipurilor de convergenţă 44

§ 5. Valori medii, dispersii, momente 47

1. Valori medii 47
2. Proprietăţi ale valorii medii 51
3. Valori medii condiţionate 56
4. Dispersia unei variabile aleatoare 57
5. Momente 59
6. Corelaţie, coeficient de corelaţie 64

§ 6. Serii de variabile aleatoare independente 68

Capitolul II. *Legea numerelor mari. Funcţie caracteristică. Legi limită* 72

§ 1. Legea numerelor mari 72

1. Proprietăţi asimptotice 72
2. Stabilitate 78
3. Legea numerelor mari pentru variabile aleatoare legate 79

§ 2. Funcţie caracteristică 85

1. Definiţii, proprietăţi 85
2. Teorema de inversiune 89

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

3. Şiruri de funcţii caracteristice şi de repartiţie 95
4. Teorema lui Bochner 101
5. Funcţii caracteristice n-dimensionale 105
6. Funcţie generatoare 106

§ 3. Repartiţia normală 117

1. Repartiţia normală unidimensională 117
2. Repartiţia normală bidimensională 123
3. Repartiţia normală s-dimensională 126

§ 4. Legi limită 134

1. Preliminarii 134
2. Teorema lui Leapunov 135
3. Teorema lui Lindeberg 139
4. Convergenţa către legea Poisson 143

Capitolul III. *Funcţii aleatoare* 145

§ 1. Generalităţi 145

1. Noţiunea de funcţii aleatoare 145
2. Funcţii aleatoare de ordinul doi 148

§ 2. Proprietăţi ale funcţiei de corelaţie 151

1. Proprietăţi de structură 151
2. Proprietăţi în medie 156
3. Funcţii aleatoare multidimensionale 161

§ 3. Filtre liniare 162

1. R—filtre 162
2. L—filtre 166
3. Exemple 167

§ 4. Funcţii aleatoare staţionare 172

1. Proprietăţi ale funcţiei de corelaţie 172
2. Teorema de reprezentare spectrală 175
3. Cazul multidimensional 178

Capitolul IV. *Procese Markov* 179

§ 1. Procese Markov depinzînd de un parametru discret 179

1. Generalităţi 179
2. Probabilităţi de trecere 180
3. O teoremă de existenţă 182
4. Probabilităţi de trecere după n paşi 183
5. O teoremă ergodică 185
6. Extensiunea la o mulţime arbitrară de stări 189
7. Entropia lanţurilor Markov 191
8. Aplicaţie la o problemă de programare 193

§ 2. Procese Markov depinzînd de un parametru continuu 196

1. Generalităţi 196
2. Ecuaţiile lui Kolmogorov 198

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

3. Procese total discontinue 204
4. Procese Poisson 206

Capitolul V. *Lanțuri cu legături complete* 208

§ 1. Lanțuri cu legături complete Onicescu-Mihoc 208

1. Lanțuri cu legături complete simple și multiple 208
2. Lanțuri alternative 210
3. Comportarea asimptotică. Diverse forme de ergodicitate 211
4. Exemple de lanțuri cu legături complete 212

§ 2. Teoreme ergodice. Teoreme limită 218

1. Teorema ergodică a lui O. Onicescu și G. Mihoc 218
2. Lanțuri liniare alternative 224
3. Analiza unei scheme speciale 225
4. Comportarea asimptotică a unui sistem circular de urne. Legea numerelor mari 230
5. Legi asimptotice pentru abateri 231
6. Deducerea legilor limită 232
7. Teoreme limită 238

Capitolul VI. *Elemente de teoria așteptării* 249

§ 1. Generalități 249

1. Introducere 249
2. Descrierea probabilistă a intervalelor de venire și serviciu 251

§ 2. Model cu o singură stație 255

1. Descrierea modelului 255
2. Ecuațiile modelului în cazul echilibrului statistic 258
3. Caracteristicile modelului 259
4. Aplicație 262
5. Determinarea lui p (>0) 265
6. Model cu șir de așteptare limitat 266
7. Model cu timpul mediu de serviciu proporțional cu numărul unităților din sistem 268

§ 3. Mai multe stații 270

1. Descrierea și ecuațiile modelului 270
2. Caracteristicile modelului 275
3. Aplicație 278

§ 4. Stație unică și număr finit de unități 279

1. Descrierea și ecuațiile modelului 279
2. Caracteristicile modelului 282
3. Aplicații 283
4. Aspectul economic al fenomenului de așteptare 284

§ 5. Mai multe stații și număr limitat de unități 286

1. Ecuațiile modelului 286
2. Cîteva caracteristici 289

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

§ 6. Modele cu timp discret 289

1. Ecuațiile modelului 289
2. Caracteristicile modelului 292
3. Aplicații 294

§ 7. Model cu unități nedisciplinate 295

Capitolul VII. *Elemente de statistică matematică* 299

§ 1. Repartiții discrete 299

1. Repartiția δ_a 299
2. Repartiția binomială 300
3. Repartiția multidimensională 304
4. Repartiția Poisson 305

§ 2. Repartiții înrudite cu cea normală 308

1. Repartiția χ^2 308
2. Repartiția t 311
3. Repartiția Snedecor și repartiția z 313
4. Repartiția beta 315

§ 3. Alte repartiții continue 317

1. Repartiția uniformă 317
2. Repartiția Cauchy și repartiția Laplace 318
3. Repartițiile Pearson 319

§ 4. Noțiuni de teoria selecției 320

1. Considerații generale 320
2. Media de selecție 321
3. Momente de selecție 323

§ 5. Noțiuni de teoria estimației 324

1. Considerații generale 324
2. Funcții de estimație eficiente 325
3. Funcții de estimație suficiente 328
4. Metoda verosimilității maxime 330
5. Intervale de încredere pentru estimarea mediei și dispersiei unei repartiții normale 336
6. Intervale de încredere pentru estimarea mediei unei colectivități cu ajutorul repartiției *t* 339
7. Intervale de încredere pentru selecții mari 341

§ 6. Verificarea ipotezelor 344

1. Considerații generale 344
2. Utilizarea repartiției Snedecor la verificarea ipotezei cu privire la egalitatea dispersiilor 344
3. Criteriul χ^2 345
4. Teoremele lui Glivenko și Kolmogorov 347

Scanned with OKEN Scanner

Tehnoredactor : PRUȘAN TAMARA

Dat la cules 16.07.1963. Bun de tipar 14.12.1963. Apărut 1963. Tiraj 1200+120 1/1 pergamoid. Hîrtie scris tip I a de 80 g/m², 70×100/16. Coli editoriale 19,995. Coli de tipar 22,50. A. 8476. C.Z. pentru bibliotecile mari 519(075.8). C.Z. pentru bibliotecile mici 51.

Tiparul executat sub comanda nr. 30.613 la Combinatul Poligrafic „Casa Scînteii", Piața Scînteii nr. 1, București — R.P.R.

Scanned with OKEN Scanner